

אנו והאתגרים

במה מדובר! ומה האתגר?
להסתכל על פעולת חשבון, ולהגות בה,
ולתת תשובה מהירה ומדויקת
בעזרת החשבון ללא חשבון.

מהיום תעמוד לרשותך כמות ספרים אלקטרוניים.
כן, ספרים שהוקדשו ויוחדו לספק לך אתגרים מתמטיים.
כל ספר יכול רק מספר דפים מצומצמים,
היות שאין התכלית מזה להטריד אותך בהסברים,
כי אם
להעלותך מעלה מעלה מעל האתגר שאנו עוסקים בו.

האתגרים שבספר זה!

לתת לילד לחבר לנו פעולה כזו.

$$4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$$

ולכן אנו נצטרך לעבור מהקל אל הכבד
וכאשר יכבד עלינו העול נפנה לשיטות ההקלה.
ולשלוט בפעולות אלו בשלב אחרי שלב,
אין הכוונה לדעת לחשב
אלא לדעת לפתור בדרך
החשבון ללא חשבון.

לתשובה מהירה ובעלפה וללא חשבון

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

לתשובה מהירה ובעלפה וללא חשבון

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$$

לתשובה מהירה ובעלפה וללא חשבון

$$3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

לתשובה מהירה ובעלפה וללא חשבון

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3$$

לתשובה מהירה ובעלפה וללא חשבון

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

אנו נראה כל זה צעד אחרי צעד.

תזכור! אנו נגיע לתרגיל הזה

תמצא לי בין רגע כמה זה, הסך ... מ 4^3 ועד 9^3

ספר זה מחולק לשמונה חלקים. (פרקים)

- חלק א': $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$	- חלק ה': הבדלי ריבועים.
- חלק ב': $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$	- חלק ו': טבלה: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$
- חלק ג': $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$	- חלק ז': טבלה: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$
- חלק ד': $4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3$	- חלק ח': טבלה: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$

פרק : א'

הנושא :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = ?$$

אנו נתחיל ונחשב.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

אבל! אבל! אני יודע כי 21 שווה 3 כפול 7
איך אפשר לגלות את ה 3 ואת ה 7 כשמסתכלים על

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = ?$$

כך!

חצי 6 שווה 3.

וכך,

המספר שבא אחרי ה 6 הוא המספר 7.

את האמת לאמתו כך הייתה אמורה להיות הפעולה

לפי הנוסחה המקובלת לחיבור זה ...

$$(6+1) \text{ כפול } 2 \text{ ב } 2$$

ואז זה שווה 21.

זוג או פרד

הדבר היותר פשוט כאשר אנו מבחינים כי

6 הוא מספר זוגי, ו 6+1 הוא מספר אי-זוגי.

להעיר. כל מקום שיש "מספר ועוד אחד" כלומר המספר הבא אחריו.
וכל מקום שיש "מספר פחות אחד" כלומר המספר שקדם אותו מספר.

ואכן יש לפנינו שני מספרים אחד זוגי ואחד אי-זוגי.

וקל יותר למצוא חצי המספר הזוגי.

ואכן דרכנו תהיה :

חצי הזוגי שבהם כפול האי-זוגי.

בוא ונבדוק אם זה ילך לנו גם בפעולה הבאה.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = ?$$

אני כבר יודע שיש לי עסק עם המספר 7 ועם המספר שאחריו 8

ואני גם יודע שאני צריך למצוא חצי המספר הזוגי, כלומר 4

$$28 = 7 \text{ כפול } 4$$

נא לבדוק עם המחשבון כמה זה 1 ועוד 2 ועוד ... עד 7

אני בטוח שזה יהיה 28.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = ?$$

אני כבר יודע שיש לי עם המספר 8 ועם המספר שאחריו 9
ואני גם יודע שאני צריך למצוא חצי המספר הזוגי, כלומר 4
ולא נשאר לי אלא לכפול 4 כפול 9 = 36
נא לבדוק עם המחשבון כמה זה 1 ועוד 2 ועוד ... עד 8
אני בטוח שזה יהיה 36.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = ?$$

אני כבר יודע שיש לי עסק עם המספר 11 ועם המספר שאחריו 12
ואני גם יודע שאני צריך למצוא חצי המספר הזוגי, כלומר 6
ולא נשאר לי אלא לכפול 6 כפול 11 = 66
נא לבדוק עם המחשבון כמה זה 1 ועוד 2 ועוד ... עד 11
אני בטוח שזה יהיה 66.

וכעת בתור תרגיל, תבדוק ותוודא אמתותה של כל שורה ושורה בלוח זה.
וגם תכיר בעצמך אם הגעת לרמת "בעלפה" בשבילך?

מימין לשמאל

סימנים "ז" זוג , "פ" פרד

תשובה	איך?	מ ... ועד ...	סימן
3	3 x 1	1 ועד 2	ז
6	2 x 3	1 ועד 3	פ
10	5 x 2	1 ועד 4	ז
15	3 x 5	1 ועד 5	פ
21	7 x 3	1 ועד 6	ז
28	4 x 7	1 ועד 7	פ
36	9 x 4	1 ועד 8	ז
45	5 x 9	1 ועד 9	פ
55	11 x 5	1 ועד 10	ז
66	6 x 11	1 ועד 11	פ
78	13 x 6	1 ועד 12	ז
91	7 x 13	1 ועד 13	פ
105	15 x 7	1 ועד 14	ז
120	8 x 15	1 ועד 15	פ

ובפרט יש להתבונן בעמודה של "איך?"
ויש לשים לב כי לכל המספרים "פ" ה "אי-זוגיים"?
1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

אותו אנו כופלים בחצי המספר שבא אחריו.
כלומר מ 1 ועד 7, אנו מתחיל לכפול
7 כפול חצי 8 = 7 כפול 4 = 28

יש לשים לב כי כל המספרים, הם הזוגיים?
 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14.
 את חציו אנו כופלים במספר שבא אחריו.
 כלומר מ 1 ועד 10, מתחילים לכפול
 חצי 10 כפול 11 = 5 כפול 11 = 55

בעזרת הטבלה הזו אנו נשלוט בנוסחה שהגענו אליה.

מ " 1 ועד ... זוגי " כלומר המספר הבא אחריו אינו זוגי. אנו נכפול חצי ה "זוגי" במספר שלאחריו.	
מ 1 ועד 8 הבא אחרי 8 ← 9 חצי הזוגי * הבא אחריו. $9 \times 4 = 9 \times 8/2$ תשובה ← 36	מ 1 ועד 10 הבא אחרי 10 ← 11 חצי הזוגי * הבא אחריו. $11 \times 5 = 11 \times 10/2$ תשובה ← 55
מ 1 ועד 18 הבא ... ← 19 חצי הזוגי * הבא אחריו. $19 \times 9 = 19 \times 18/2$ תשובה ← 171	מ 1 ועד 6 הבא ... ← 7 חצי הזוגי * הבא אחריו. $7 \times 3 = 7 \times 6/2$ תשובה ← 21
מ 1 ועד 12 הבא ... ← 13 חצי הזוגי * הבא אחריו. $13 \times 6 = 13 \times 12/2$ תשובה ← 78	מ 1 ועד 16 הבא ... ← 17 חצי הזוגי * הבא אחריו. $17 \times 8 = 17 \times 16/2$ תשובה ← 136
מ 1 ועד 14 הבא ... ← 15 חצי הזוגי * הבא אחריו. $15 \times 7 = 15 \times 14/2$ תשובה ← 105	מ 1 ועד 4 הבא ... ← 5 חצי הזוגי * הבא אחריו. $5 \times 2 = 5 \times 4/2$ תשובה ← 10

וכעת אני מוכן לכל אתגר הקשור בפענוח נוסחה זו.
 ואולי גם כן... יש לי רעיון ליצור איזה משחק פלאי...

עצה!

עשה לך הרבה תרגילים, עד שאתה הוא בעל הבית
 (כלומר לא בגלל "אמר לי", "כך נמסר", ... אלא :
 "תן לי לנסות", "תן לי לראות איך זה הולך", ...)
 וזה ישפיע שתהיה על הגובה.

בעזרת הטבלה הזו אנו נשלוט בנוסחה שהגענו אליה.

מ " 1 ועד ... אי-זוגי "	
כלומר המספר הבא אחריו הוא זוגי. אנו נכפול המספר שלנו בחצי ה "זוגי" שאחריו.	
מ 1 ועד 11 הבא אחרי 11 ← 12 האי-זוגי * זוגי שאחריו $6 \times 11 = 12/2 \times 11$ תשובה ← 66	מ 1 ועד 5 הבא אחרי 5 ← 6 האי-זוגי * זוגי שאחריו $3 \times 5 = 6/2 \times 5$ תשובה ← 15
מ 1 ועד 9 הבא ... ← 10 האי-זוגי * זוגי שאחריו $5 \times 9 = 10/2 \times 9$ תשובה ← 45	מ 1 ועד 13 הבא ... ← 14 האי-זוגי * זוגי שאחריו $7 \times 13 = 14/2 \times 13$ תשובה ← 91
מ 1 ועד 7 הבא ... ← 8 האי-זוגי * זוגי שאחריו $4 \times 7 = 8/2 \times 7$ תשובה ← 28	מ 1 ועד 19 הבא ... ← 20 האי-זוגי * זוגי שאחריו $10 \times 19 = 20/2 \times 19$ תשובה ← 190
מ 1 ועד 17 הבא ... ← 18 האי-זוגי * זוגי שאחריו $9 \times 17 = 18/2 \times 17$ תשובה ← 153	מ 1 ועד 15 הבא ... ← 16 האי-זוגי * זוגי שאחריו $8 \times 15 = 16/2 \times 15$ תשובה ← 120

וכעת אני מוכן לכל אתגר הקשור בפענוח נוסחה זו.
ואולי גם כן... יש לי רעיון ליצור איזה משחק פלאי...

עצה!

עשה לך הרבה תרגילים, עד שאתה הוא בעל הבית
(כלומר לא בגלל "אמרו לי", "כך נמסר", ... אלא :
"תן לי לנסות", "תן לי לראות איך זה הולך", ...)
וזה ישפיע שתהיה על הגובה.

פרק : ב'

הנושא :

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = ?$$

האם נכון כי ...

$$\cancel{1} + \cancel{2} + \cancel{3} + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

מ " 1 " ועד " 9 "

פחות : מ " 1 " ועד " 3 "

נותן לי : מ " 4 " ועד " 9 "

!!!! ... כן!

בכדי למצוא מ " 4 " ועד " 9 "

אני אמצא

מ " 1 " ועד " 9 "

פחות מ " 1 " ועד " 3 "

ובכן לעבודה ...

מ " 1 " ועד " 9 " = 9 כפול $10/2 = 45$

מ " 1 " ועד " 3 " = 3 כפול $4/2 = 6$

וכעת : $45 - 6 = 39$

כלומר : $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$

עוד תרגיל.

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$$

מ 7 ועד 12

כלומר מ 1 ועד 12 פחות מ 1 ועד 6

מ 1 ועד 12 = $\frac{1}{2}$ של $(12 * 13)$

פחות

מ 1 ועד 6 = $\frac{1}{2}$ של $(6 * 7)$

כלומר אני מסתכל ב :

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$$

אני מסתכל ב 12 ורואה החצי 6 ורואה אחריו 13

(13 המספר המצוי רק בדמיוני, כי 13 אחרי 12)

6 כפול 13 = 78, זהו מ 1 ועד 12

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$$

אני מסתכל ב 7, אבל יש לחסר מ 1 עד 6

3 כפול 7 = 21, זהו מ 1 ועד 6

יש לדעת כי שיטה זו היא רק גישה התחלתית.

כי אנו נראה גישה יותר פשוטה, אחר הבנת שיטה זו.

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$$

להסתכל ב 12 ולראות 6 ולראות 13 $\Leftarrow 13 * 6 = 78$

ולהסתכל ב 7 ולראות 3 ולראות 7 $\Leftarrow 7 * 3 = 21$

$$78 - 21 = 57$$

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57$$

כעת רק תעקוב אחרי כל שורה ושורה
משמאל לימין.

פעולת חיסור	הקצה הקטן x שלפניו, ÷ ב 2	הקצה הגדול x שלאחריו, ÷ ב 2	הפעולה
$78 - 21 = 57$	$7(7-1)/2 = 7 \times 3 = 21$	$12(12+1)/2 = 6 \times 13 = 78$	$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$
$28 - 03 = 25$	$3(3-1)/2 = 3 \times 1 = 03$	$7(7+1)/2 = 7 \times 4 = 28$	$3 + 4 + 5 + 6 + 7$
$55 - 21 = 34$	$7(7-1)/2 = 7 \times 3 = 21$	$10(10+1)/2 = 5 \times 11 = 55$	$7 + 8 + 9 + 10$
$78 - 32 = 46$	$8(8-1)/2 = 4 \times 8 = 32$	$12(12+1)/2 = 6 \times 13 = 78$	$8 + 9 + 10 + 11 + 12$
$105 - 36 = 69$	$9(9-1)/2 = 9 \times 4 = 36$	$14(14+1)/2 = 7 \times 15 = 105$	$9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14$

בעזרת הטבלה הזו אנו נשלוט בנוסחה שהגענו אליה.

חצי הזוגי כפול האי-זוגי לזה ולזה כלומר, המספר הגדול כפול שלאחריו, ולחלק ב 2. ממנו יש להפחית המספר הקטן כפול את שלפניו, וחלק ב 2.	
מ 5 ועד 8 $N = 8 : N' = 5$ חצי זוגי כפול אי-זוגי לזה ולזה $(8/2 * 9) - (4/2 * 5)$ $= (4 * 9) - (2 * 5) = 36 - 10$ ⇒ תשובה 26	מ 4 ועד 10 $N = 10 : N' = 4$ חצי זוגי כפול אי-זוגי לזה ולזה $(10/2 * 11) - (4/2 * 3)$ $= (5 * 11) - (2 * 3) = 55 - 6$ ⇒ תשובה 49
מ 6 ועד 11 $N = 11 : N' = 6$ חצי זוגי כפול אי-זוגי לזה ולזה $(12/2 * 11) - (6/2 * 5)$ $= (6 * 11) - (3 * 5) = 66 - 15$ ⇒ תשובה 51	מ 5 ועד 11 $N = 11 : N' = 5$ חצי זוגי כפול אי-זוגי לזה ולזה $(12/2 * 11) - (4/2 * 5)$ $= (6 * 11) - (2 * 5) = 66 - 10$ ⇒ תשובה 56
מ 11 ועד 18 $N = 18 : N' = 11$ חצי זוגי כפול אי-זוגי לזה ולזה $(18/2 * 19) - (10/2 * 11)$ $= (5 * 11) - (2 * 3) = 55 - 6$ ⇒ תשובה 116	מ 13 ועד 19 $N = 19 : N' = 13$ חצי זוגי כפול אי-זוגי לזה ולזה $(20/2 * 19) - (12/2 * 13)$ $= (10 * 19) - (6 * 13) = 190 - 78$ ⇒ תשובה 112

וכעת אני מוכן לכל אתגר הקשור בפענוח נוסחה זו.
ואולי גם כן... יש לי רעיון ליצור איזה משחק פלאי...

גישה פשוטה יותר.

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$$

יש כאן 6 מספרים

$$19 = 12 + 7 \text{ : ויש כאן שתי קצוות בסך :}$$

סך הקצוות כפול כמות המספרים. ולחלק בשתיים.

יש לדעת כי ...

אם סך הקצוות "זוגי", כמות המספרים "אי-זוגי"
וכן להפך.

נמצא במהלך הפעולה, אחד משניהם מתחלק לשניים.

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$$

יש כאן שש מספרים, והחצי 3

$$19 = 12 + 7 \text{ ... ויש כאן סך של}$$

$$57 = 19 \text{ אכן } 3 \text{ כפול}$$

כלומר :

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 57$$

ועוד תרגיל.

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

יש כאן 7 מספרים

$$16 = 11 + 5 \text{ ... ויש כאן סך של } 8 =$$

$$56 = 7 \text{ אכן } 8 \text{ כפול}$$

כלומר :

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 = 56$$

אבל מי אומר שיש כאן "שבע" מספרים?

כלומר מה הנוסחה החוסכת לנו לספור?

כמובן שאני צריך להיעזר במספרים שלרשותי.

$$4 \text{ } 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

$$11 - (5 - 1) = 11 - 4 = 7$$

"הקצה הגדול" פחות "המספר הקודם לקצה הקטן"

$$N' + (N' + 1) + \dots + N$$

$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$

$$11 - (5 - 1) = 11 - 4 = 7$$

להבנת העניין.

נניח שיש לפנינו 6 מספרים.

כלומר, 3 זוגות מספרים. איזה זוג מהם,

חציו, הוא הממוצע שאפשר לכפול ב 6.

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$$

$$19 = 10 + 9 = 11 + 8 = 12 + 7$$

כמובן כי $9.5 = 19/2$ הוא הממוצע

שאם נכפול אותו ב 6, נקבל סך ששת המספרים.

$$57 = 6 * 9.5$$

לפי דרכנו, אנו מסודרים כך

$$57 = 19 * 3 = (7 + 12) 6/2$$

הבה ונראה כל זה בטבלה.
 כעת רק תעקוב אחרי כל שורה ושורה
 משמאל לימין.

חצי זוגי x הזוגי	סך הקצוות	כמה מספרים	הפעולה
$3 \times 19 = 57$	$7 + 12 = 19$	$12 - 6 = 6$	$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$
$5 \times 5 = 25$	$3 + 7 = 10$	$7 - 2 = 5$	$3 + 4 + 5 + 6 + 7$
$2 \times 17 = 34$	$7 + 10 = 17$	$10 - 6 = 4$	$7 + 8 + 9 + 10$
$5 \times 10 = 50$	$8 + 12 = 20$	$12 - 7 = 5$	$8 + 9 + 10 + 11 + 12$
$3 \times 23 = 69$	$9 + 14 = 23$	$14 - 8 = 6$	$9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14$

בעזרת הטבלה הזו אנו נשלוט בנוסחה שהגענו אליה.

יש לנו שתי הקצוות ויש לנו כמות המספרים.
 הזוגי שבהם לחלק לשניים.
 ולכפול החצי בשלם.
 * אנו נחלק הזוגי שבהם לשניים לפני הכפל.

מ 5 ועד 8
 8 פחות 4 = 4 מספרים
 אי-זוגי כפול חצי זוגי
 4 מספרים
 $E + E' = 8 + 5 = 13$
 כלומר 2×13
 $\Rightarrow$ תשובה 26

מ 6 ועד 11
 11 פחות 5 = 6 מספרים
 אי-זוגי כפול חצי זוגי
 6 מספרים
 $E + E' = 11 + 6 = 17$
 כלומר 3×17
 $\Rightarrow$ תשובה 51

מ 11 ועד 18
 18 פחות 10 = 8 מספרים
 אי-זוגי כפול חצי זוגי
 8 מספרים
 $E + E' = 18 + 11 = 29$
 כלומר 4×29
 $\Rightarrow$ תשובה 116

מ 4 ועד 10
 10 פחות 3 = 7 מספרים
 אי-זוגי כפול חצי זוגי
 7 מספרים
 $E + E' = 10 + 4 = 14$
 כלומר 7×7
 $\Rightarrow$ תשובה 49

מ 5 ועד 11
 11 פחות 4 = 7 מספרים
 אי-זוגי כפול חצי זוגי
 7 מספרים
 $E + E' = 11 + 5 = 16$
 כלומר 7×8
 $\Rightarrow$ תשובה 56

מ 13 ועד 19
 19 פחות 12 = 7 מספרים
 אי-זוגי כפול חצי זוגי
 7 מספרים
 $E + E' = 19 + 13 = 32$
 כלומר 7×16
 $\Rightarrow$ תשובה 112

פרק : ג'

הנושא : $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3$

נסתכל ביחד מקרוב יותר!

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 \\1^3 + 2^3 + 3^3 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 &= 1 + 8 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 &= 1 + 8 + 27 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= 1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225 = 15^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 &= 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441 = 21^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2\end{aligned}$$

במילים אחרות ...

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 &= (1 + 2)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 &= (1 + 2 + 3)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= (1 + 2 + 3 + 4)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 \\1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2\end{aligned}$$

אך בשבילי ... אין בעיות!

אני יכול למצוא התשובה לסכומים האלו :

$$\begin{aligned}1 + 2, \quad 1 + 2 + 3, \quad 1 + 2 + 3 + 4, \\1 + 2 + 3 + 4 + 5, \quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6\end{aligned}$$

ואכן לדוגמה

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = ?$$

אני מסתכל ב "4"

ורואה 2 ורואה 5

(5 הנעלם, המספר שאחרי 4)

וכופל 2 כפול 5 ומקבל 10

ואני מגיע ל

$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

אך "10" זה, יש לראות אותו "10²"

ובכן אני יכול להכריז כי : $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$

ועוד דוגמה

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = ?$$

אני מסתכל ב "7" ורואה 7, ורואה 8 (הנעלם) שנהפך ל 4

וכופל, 4 כפול 7 ומקבל 28

אך "28" זה, יש לראות אותו "28²"

ובכן אני יכול להכריז כי :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 28^2$$

פשוט מאוד! לא כן?

בעזרת הטבלה הזו אנו נשלוט בנוסחה שהגענו אליה.

דוגמאות ל "זוגי"
לזוגי שלנו נקרא "E"
מ "1 ועד ... זוגי"

לחלק E ב 2 ואחר כך לכפול ב (E + 1)

כלומר המספר הבא אחריו כפול חצי המספר שיש לי.
פעולות החשבון משמאל לימין/מימין לשמאל.

מ 1^3 ועד 8^3
המספר הבא $\leftarrow 9$
 $E \div 2$ כפול $E + 1$
 $8 \div 2 = 4$
 $8 \times 4 = 9 \times 4$
 $36^2 \Rightarrow 36 \Rightarrow$ תשובה

מ 1^3 ועד 18^3
המספר הבא $\leftarrow 19$
 $E \div 2$ כפול $E + 1$
 $18 \div 2 = 9$
 $18 \times 9 = 19 \times 9$
 $171^2 \Rightarrow 171 \Rightarrow$ תשובה

מ 1^3 ועד 12^3
המספר הבא $\leftarrow 13$
 $E \div 2$ כפול $E + 1$
 $12 \div 2 = 6$
 $12 \times 6 = 13 \times 6$
 $78^2 \Rightarrow 78 \Rightarrow$ תשובה

מ 1^3 ועד 14^3
המספר הבא $\leftarrow 15$
 $E \div 2$ כפול $E + 1$
 $14 \div 2 = 7$
 $14 \times 7 = 15 \times 7$
 $105^2 \Rightarrow 105 \Rightarrow$ תשובה

מ 1^3 ועד 10^3
המספר הבא $\leftarrow 11$
 $E \div 2$ כפול $E + 1$
 $10 \div 2 = 5$
 $10 \times 5 = 11 \times 5$
 $55^2 \Rightarrow 55 \Rightarrow$ תשובה

מ 1^3 ועד 6^3
המספר הבא $\leftarrow 7$
 $E \div 2$ כפול $E + 1$
 $6 \div 2 = 3$
 $6 \times 3 = 7 \times 3$
 $21^2 \Rightarrow 21 \Rightarrow$ תשובה

מ 1^3 ועד 16^3
המספר הבא $\leftarrow 17$
 $E \div 2$ כפול $E + 1$
 $16 \div 2 = 8$
 $16 \times 8 = 17 \times 8$
 $136^2 \Rightarrow 136 \Rightarrow$ תשובה

מ 1^3 ועד 4^3
המספר הבא $\leftarrow 5$
 $E \div 2$ כפול $E + 1$
 $4 \div 2 = 2$
 $4 \times 2 = 5 \times 2$
 $10^2 \Rightarrow 10 \Rightarrow$ תשובה

וכעת אני מוכן לכל אתגר הקשור בפענוח נוסחה זו.
ואולי גם כן... יש לי רעיון ליצור איזה משחק פלאי...

עצה!

עשה לך הרבה תרגילים, עד שאתה הוא בעל הבית
כלומר לא בגלל "אמרו לי", "כך נמסר", ... אלא:
"תן לי לנסות", "תן לי לראות איך זה הולך", (...)
וזה ישפיע שתהיה על הגובה.

בעזרת הטבלה הזו אנו נשלוט בנוסחה שהגענו אליה.

דוגמאות ל "אי-זוגי " לאי-זוגי שלנו נקרא " O " מ " 1 ועד ... אי-זוגי " לחלק (O+1) ב 2 ואחר כך לכפול ב O כלומר המספר חצי הבא אחריו כפול המספר שיש לי. פעולות החשבון משמאל לימין/מימין לשמאל.	
מ 1^3 ועד 11^3 המספר הבא $\leftarrow 12$ O כפול $(O+1) \div 2$ $12 \div 2 = 6$ 6×11 $66^2 \Rightarrow 66 \Rightarrow$ תשובה	מ 1^3 ועד 5^3 המספר הבא $\leftarrow 6$ O כפול $(O+1) \div 2$ $6 \div 2 = 3$ 3×5 $15^2 \Rightarrow 15 \Rightarrow$ תשובה
מ 1^3 ועד 9^3 המספר הבא $\leftarrow 10$ O כפול $(O+1) \div 2$ $10 \div 2 = 5$ 5×9 $45^2 \Rightarrow 45 \Rightarrow$ תשובה	מ 1^3 ועד 13^3 המספר הבא $\leftarrow 14$ O כפול $(O+1) \div 2$ $14 \div 2 = 7$ 7×13 $91^2 \Rightarrow 91 \Rightarrow$ תשובה
מ 1^3 ועד 7^3 המספר הבא $\leftarrow 8$ O כפול $(O+1) \div 2$ $8 \div 2 = 4$ 4×7 $28^2 \Rightarrow 28 \Rightarrow$ תשובה	מ 1^3 ועד 19^3 המספר הבא $\leftarrow 20$ O כפול $(O+1) \div 2$ $20 \div 2 = 10$ 10×19 $190^2 \Rightarrow 190 \Rightarrow$ תשובה
מ 1^3 ועד 17^3 המספר הבא $\leftarrow 18$ O כפול $(O+1) \div 2$ $18 \div 2 = 9$ 9×17 $153^2 \Rightarrow 153 \Rightarrow$ תשובה	מ 1^3 ועד 15^3 המספר הבא $\leftarrow 16$ O כפול $(O+1) \div 2$ $16 \div 2 = 8$ 8×15 $120^2 \Rightarrow 120 \Rightarrow$ תשובה

וכעת אני מוכן לכל אתגר הקשור בפענוח נוסחה זו.
ואולי גם כן... יש לי רעיון ליצור איזה משחק פלאי...

עצה!

עשה לך הרבה תרגילים, עד שאתה הוא בעל הבית
כלומר לא בגלל "אמרו לי", "כך נמסר", ... אלא:
"תן לי לנסות", "תן לי לראות איך זה הולך", ...
וזה ישפיע שתהיה על הגובה.

אנו עדיין זוכרים

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441 = 21^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2$$

אך בשבילי ... אין בעיות!

אני יכול למצוא התשובה לסכומים האלו:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

אכן

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = ?$$

אני מסתכל ב "6"

ורואה 3 ורואה 7 האמור להופיע אחרי ה 6.

(7 הנעלם, המספר שאחרי 6)

וכופל 3 כפול 7 ומקבל 21

ואני מגיע ל

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

אך "21" זה, יש לראות אותו "21"

ובכן אני יכול להכריז כי:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 21^2$$

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁	C ₁₂
L ₀	1												
L ₁	1	1 ³											
L ₂	1	2 ³	1										
L ₃	1	3 ³	3	1									
L ₄	1	4 ³	6	4	1								
L ₅	1	5 ³	10	10	5	1							
L ₆	1	6 ³	15	20	15	6	1						
L ₇	1	7	21 ²	35	35	21	7	1					
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
L ₉	1	9 ³	36 ²	84	126	126	84	36	9	1			
L ₁₀	1	10	45 ²	120	210	252	210	120	45	10	1		
L ₁₁	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

$$מ 1^3 עד 6^3 = (6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)^2$$

$$21^2 \Leftrightarrow 21 = 7 * 6/2, \text{ כלומר,}$$

וכן

$$9^3 = 45^2 - 36^2$$

פרק : ד'

הנושא : $9^3 + 8^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3$

האם אתה עדיין זוכר מה שלמדנו בפרק ב'?

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = ?$$

האם נכון כי ...

$$\cancel{1} + \cancel{2} + \cancel{3} + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

מ " 1 " ועד " 9 "

פחות : מ " 1 " ועד " 3 "

נותן לי : מ " 4 " ועד " 9 "

???? ... כן!

בכדי למצוא מ " 4 " ועד " 9 "

אני אמצא

מ " 1 " ועד " 9 "

פחות מ " 1 " ועד " 3 "

ובכן לעבודה ...

מ " 1 " ועד " 9 " 9^3 $\Leftarrow$ $10/2$ כפול $9 \Leftarrow 45 \Leftarrow 45^2$

מ " 1 " ועד " 3 " 3^3 $\Leftarrow$ $4/2$ כפול $3 \Leftarrow 6 \Leftarrow 6^2$

וכעת : $45^2 - 6^2$ זו תשובה סופית ומספקת.

כלומר :

$$9^3 + 8^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3$$

$$\Leftarrow 45^2 \text{ פחות } 6^2$$

בעזרת הטבלה הזו אנו נשלוט בנוסחה שהגענו אליה.

*** " N + 1 " כלומר המספר הבא
*** " N - 1 " כלומר המספר הקודם

$$N(N+1)/2 - N'(N'-1)/2$$

מחסרים התוצאה של "צעד ב'" מהתוצאה של "צעד א'"

מ 5^3 ועד 8^3

$$N(N+1)/2 - N'(N'-1)/2$$

$$N = 8 : N' = 5$$

$$8(8+1)/2 - 5(5-1)/2$$

$$= (4 \times 9) - (5 \times 2) = 36 - 10$$

$$\Rightarrow 36^2 - 10^2 \text{ תשובה}$$

מ 6^3 ועד 11^3

$$N(N+1)/2 - N'(N'-1)/2$$

$$N = 11 : N' = 6$$

$$11(11+1)/2 - 6(6-1)/2$$

$$= (11 \times 6) - (3 \times 5) = 66 - 15$$

$$\Rightarrow 66^2 - 15^2 \text{ תשובה}$$

מ 4^3 ועד 10^3

$$E(E+1)/2 - E'(E'-1)/2$$

$$E = 10 : E' = 4$$

$$10(10+1)/2 - 4(4-1)/2$$

$$= (5 \times 11) - (2 \times 3) = 55 - 6$$

$$\Rightarrow 55^2 - 6^2 \text{ תשובה}$$

מ 5^3 ועד 11^3

$$E(E+1)/2 - E'(E'-1)/2$$

$$E = 11 : E' = 5$$

$$11(11+1)/2 - 5(5-1)/2$$

$$= (11 \times 6) - (5 \times 2) = 66 - 10$$

$$\Rightarrow 66^2 - 10^2 \text{ תשובה}$$

פרק : ה'

חדש. EEW. חדש. EEW. חדש. EEW. חדש. EEW.

כל "הבדלי ריבועים" אינם אלא "כפל"
וכן
כל "כפל" אינו אלא "הבדלי ריבועים".

$$36^2 - 10^2 \Rightarrow (36 + 10) (36 - 10) \Rightarrow 46 \times 26$$

למה שנוגע לעבודתנו :

כל "הבדלי ריבועים" הנם "כפל"

$$A^2 - B^2 \Rightarrow (A + B) (A - B)$$

מהבדלי ריבועים אל הכפל.

בעזרת הטבלה הזו אנו נשלוט בנוסחה שהגענו אליה.

$A^2 - B^2 \Rightarrow (A + B) (A - B)$	
$28^2 - 15^2$ $A^2 - B^2$ $= (A + B) (A - B)$ $(A + B) = 28 + 15 = 43$ $(A - B) = 28 - 15 = 13$ $43 \times 13 \Rightarrow \text{תשובה}$	$38^2 - 17^2$ $A^2 - B^2$ $= (A + B) (A - B)$ $(A + B) = 38 + 17 = 55$ $(A - B) = 38 - 17 = 21$ $55 \times 21 \Rightarrow \text{תשובה}$
$14^2 - 6^2$ $A^2 - B^2$ $= (A + B) (A - B)$ $(A + B) = 14 + 6 = 20$ $(A - B) = 14 - 6 = 8$ $20 \times 8 \Rightarrow \text{תשובה}$	$52^2 - 27^2$ $A^2 - B^2$ $= (A + B) (A - B)$ $(A + B) = 52 + 27 = 79$ $(A - B) = 52 - 27 = 25$ $79 \times 25 \Rightarrow \text{תשובה}$
$41^2 - 9^2$ $A^2 - B^2$ $= (A + B) (A - B)$ $(A + B) = 41 + 9 = 50$ $(A - B) = 41 - 9 = 32$ $50 \times 32 \Rightarrow \text{תשובה}$	$66^2 - 22^2$ $A^2 - B^2$ $= (A + B) (A - B)$ $(A + B) = 66 + 22 = 88$ $(A - B) = 66 - 22 = 44$ $88 \times 44 \Rightarrow \text{תשובה}$
$77^2 - 13^2$ $A^2 - B^2$ $= (A + B) (A - B)$ $(A + B) = 77 + 13 = 90$ $(A - B) = 77 - 13 = 64$ $90 \times 64 \Rightarrow \text{תשובה}$	$47^2 - 18^2$ $A^2 - B^2$ $= (A + B) (A - B)$ $(A + B) = 47 + 18 = 65$ $(A - B) = 47 - 18 = 29$ $65 \times 29 \Rightarrow \text{תשובה}$

עוד צעד

להפוך הבלתי ריבועים לפעולת כפל.

מ " ... ועד ... "

מ 4^3 ועד 10^3

$N = 10$, $N' = 4$

$$N(N+1)/2 - N'(N'-1)/2$$

$$55^2 - 6^2 \Rightarrow (55+6)(55-6) \Rightarrow 61 \times 49$$

מ 5^3 ועד 8^3

$$N(N+1)/2 - N'(N'-1)/2$$

$N = 8 : N' = 5$

$$8(8+1)/2 - 5(5-1)/2$$

$$= (4 \times 9) - (5 \times 2) = 36 - 10$$

$$\Rightarrow 36^2 - 10^2$$

$$= (36+10)(36-10) = 46 \times 26$$

מ 6^3 ועד 11^3

$$N(N+1)/2 - N'(N'-1)/2$$

$N = 11 : N' = 6$

$$11(11+1)/2 - 6(6-1)/2$$

$$= (11 \times 6) - (3 \times 5) = 66 - 15$$

$$\Rightarrow 66^2 - 15^2$$

$$= (66+15)(66-15) = 81 \times 51$$

מ 11^3 ועד 18^3

$$N(N+1)/2 - N'(N'-1)/2$$

$N = 18 : N' = 11$

$$18(18+1)/2 - 11(11-1)/2$$

$$= (9 \times 19) - (11 \times 5) = 171 - 55$$

$$\Rightarrow 171^2 - 55^2$$

$$= (171+55)(171-55) = 226 \times 116$$

מ 4^3 ועד 10^3

$$N(N+1)/2 - N'(N'-1)/2$$

$N = 10 : N' = 4$

$$10(10+1)/2 - 4(4-1)/2$$

$$= (5 \times 11) - (2 \times 3) = 55 - 6$$

$$\Rightarrow 55^2 - 6^2$$

$$= (55+6)(55-6) = 61 \times 49$$

מ 5^3 ועד 11^3

$$N(N+1)/2 - N'(N'-1)/2$$

$N = 11 : N' = 5$

$$11(11+1)/2 - 5(5-1)/2$$

$$= (11 \times 6) - (5 \times 2) = 66 - 10$$

$$\Rightarrow 66^2 - 10^2$$

$$= (66+10)(66-10) = 76 \times 56$$

מ 13^3 ועד 19^3

$$N(N+1)/2 - N'(N'-1)/2$$

$N = 19 : N' = 13$

$$19(19+1)/2 - 13(13-1)/2$$

$$= (19 \times 10) - (13 \times 6) = 190 - 91$$

$$\Rightarrow 190^2 - 91^2$$

$$= (190+91)(190-91) = 281 \times 99$$

וכעת אני מוכן לכל אתגר הקשור בפענוח נוסחה זו.
ואולי גם כן... יש לי רעיון ליצור איזה משחק פלאי...

עצה!

עשה לך הרבה תרגילים, עד שאתה הוא בעל הבית
כלומר לא בגלל "אמרו לי", "כך נמסר", ... אלא :
"תן לי לנסות", "תן לי לראות איך זה הולך", ...
וזה ישפיע שתהיה על הגובה.

פרק : ו'

ראינו בבית ספר ...

אלגברה מי יודע?

את זה ראינו בבית ספר.

$$(a + b)^1 = 1a^1 + 1b^1$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$$

$$(a + b)^6 = 1a^6 + 5a^5b^1 + 10a^4b^2 + 10a^3b^3 + \dots$$

*** ה"אחד" שלא היה צריך להופיע כגון $1a^1$ הונח במקומו, וזה רק להבהיר יותר

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	הסך
$(a + b)^1 \rightarrow$	1	1									2
$(a + b)^2 \rightarrow$	1	2	1								4
$(a + b)^3 \rightarrow$	1	3	3	1							8
$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1						16
$(a + b)^5 \rightarrow$	1	5	10	10	5	1					32
$(a + b)^6 \rightarrow$	1	6	15	20	15	6	1				64
$(a + b)^7 \rightarrow$	1	7	21	35	35	21	7	1			128
$(a + b)^8 \rightarrow$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		256
$(a + b)^9 \rightarrow$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	512

הכוונה האחת והיחידה שבגללה הותקנה טבלה זו.

עיין בשורה 4 ותבחין.

$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1
-------------------------	---	---	---	---	---

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

נוסף לזה יש לדעת איך נבנית טבלה זו?

עניינה חיבור, שכל משבצת כוללת שתי המשבצות שעליה:

כמו למשל: המשבצת "84" כוללת שתי המשבצות "56 + 28" ...

וכן בקריאת כולם, מסתכלים מה למעלה!

אבל בבניית הטבלה וכתובתה ההפך הוא הנכון.

מחברים 56 + 28 וכותבים למטה 84.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

ובצורת המשולש הזה, נראים 56 + 28 שניהם מעל 84.

האחד למעלה מימין והשני למעלה משמאל.

אנו יש לנו להתפאר במה שגילינו בטבלה זו, והוא :
 כי טבלה זו אומרת הנני, לנושא שאנו עוסקים בו.

C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	הסך
1	1										2
1	2	1									4
1	3	3	1								8
1	4	6	4	1							16
1	5	10	10	5	1						32
1	6	15	20	15	6	1					64
1	7	21	35	35	21	7	1				128
1	8	28	56	70	56	28	8	1			256
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		512
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	

אנו מבחינים בחיבור : 1 ועד 4

כלומר : $10 = 4 + 3 + 2 + 1$

אנו מבחינים גם כן בחיבור : 9 ועד 36 = 45

היות כי יש להבחין ב 1 ועד 8 = 36

וכן יש להבחין ב 1 ועד 9 = 45

אכן $45 = 9 + 36$ שהוא $9 + (8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1)$

C₁ : עמודה "א"

C₂ : עמודה "ב"

מלמטה למעלה : $45 - 36 = 9 \rightarrow$

גילנו אם כן : שכל משבצת ערכה כערך העמודה שמשמאלה.

C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈
1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
↖	↖	↖	↖	↖				
	5	10	10	5	1			

גילנו אם כן : שכל משבצת ערכה כערך העמודה שמשמאלה.
 גם בשורה לאחרי, גם בשורה לאחרי..

C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈
1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
↖	↖	↖	↖	↖	↖			
	6	15	20	15	6	1		

גילנו אם כן : שכל משבצת ערכה כערך העמודה שמשמאלה.

היות כי עמודה ב' בנויה מ $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ וכוללת כל המספרים לאין סוף.
אכן אני יכול לקרוא $\dots$
 $15 \Leftarrow (5 + 4 + 3 + 2 + 1)$

פרק : ז' ראה זה חדש, ממש :

בפרק הקודם ראינו :
איך יכולים למצוא תחליף ...
מ 1 ועד 4
יש לכפול : 4 כפול 5 , ולחלק לשניים.
ותחליף לפעולה זו : אנו רק נסתכל בטבלה
ונקרא במשבצת שבעמודה ג' (C_3)
הנמצאת למטה ומימין לעמודה ב' (C_2)
הכוללת $4 + 3 + 2 + 1$

וכעת ראה זה חדש.

ממש חדש!

כל משבצת שבעמודה-2 ערכה " N^2 "
וכל משבצת שבעמודה-1 ערכה " N^3 "

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	הסך
1	1^3										2
1	2^3	1^2									4
1	3^3	3^2	1								8
1	4^3	6^2	4	1							16
1	5^3	10^2	10	5	1						32
1	6^3	15^2	20	15	6	1					64
1	7^3	21^2	35	35	21	7	1				128
1	8^3	28^2	56	70	56	28	8	1			256
1	9^3	36^2	84	126	126	84	36	9	1		512
1	10^3	45^2	120	210	252	210	120	45	10	1	

וכעת אנו יכולים לקרוא ישירות כמה זה :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

ולא לשכוח כי

$$45^2 - 36^2 = 9^3$$

אנו מבחינים כי יש ריבוע + מספר בחזקת 3 = ריבוע.

$$36^2 + 9^3 = 45^2$$

לזכור, עמודה-1 כוללת כל המספרים

והיא אותה עמודה-1 הכוללת כל אלו שבחזקת 3.

כלומר, כל מספר, יכול להיות בחזקת 3, שווה להבדלי ריבועים [שווה לפעולת כפל]

ומה יש עוד להתבונן בטבלה הזו?

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	הסך
1	1^3										2
1	2^3	1^2									4
1	3^3	3^2	1								8
1	4^3	6^2	4	1							16
1	5^3	10^2	10	5	1						32
1	6^3	15^2	20	15	6	1					64
1	7^3	21^2	35	35	21	7	1				128
1	8^3	28^2	56	70	56	28	8	1			256
1	9^3	36^2	84	126	126	84	36	9	1		512
1	10^3	45^2	120	210	252	210	120	45	10	1	

ולמה לא גילו את זה עד היום הזה?

פשוט!

כי לא היה בעולם כזה פיקח שיחבר

ריבוע עם מעוקב

$$9^3 + 36^2 \Rightarrow 45^2$$

אני תמיד ידעתי כי 9 ועוד 36 = 45

אך על החיבור המוזר הזה אני פשוט נדהם!

$$9^3 + 36^2 \Rightarrow 45^2$$

תראה מה הולך כאן, וכן בכולם.

$$45 - 36 = 9$$

$$45^2 - 36^2 = 9^3$$

לומדים אנו ומכאן

כי כל מספר מעוקב הנו שווה להבדלי ריבועים.

$$\text{למשל: } 7^3 = 7^2 - 1^2$$

אני בטוח שאתה תדע למצוא התשובה בעזרת הטבלה.

$$28^2 = 7^3 \text{ פחות } 21^2$$

ממש כמו ש ... 28 פחות 21 = 7

כאן אני מייעץ לך לעשות הרבה תרגילים להיות שולט בחומר.

עצה לתרגילים:

אם המספר הוא אי-זוגי

כמו 7^3 , אז יש למצוא שני המספרים בריבוע.

$$\text{לזכור } 7 = 3 + 4 \quad 21 = 7 * 3 \quad 28 = 7 * 4$$

$$28^2 - 21^2 = 7^3$$

אם המספר הוא זוגי

כמו 8^3 , אז יש למצוא שני המספרים בריבוע.

$$\text{לזכור כי } 8 \text{ חציו } 4, \text{ וכן לפניו } 7, \text{ ואחריו } 9 \quad 28 = 7 * 4 \quad 36 = 9 * 4$$

$$36^2 - 28^2 = 8^3$$

בשורות הבאות אנו לומדים לקרוא העמודות ב' וא'.

(C_2, C_1)

למשל : $10 \Rightarrow 1 + 2 + 3 + 4$

$$1^3 = 1^2$$

$$1^3 + 2^3 = 3^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 15^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 21^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = 28^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 = 36^2$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 45^2$$

וכעת תגיד לי באיזה בית ספר מלמדים כזה דבר?

תרגיל : תמצא לי **בין רגע** (כמובן על הטבלה) כמה זה הסך ...

מ 4^3 ועד 9^3

$$4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 45^2 - 6^2$$

C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
1	1^3									
1	2^3	1^2								
1	3^3	3^2	1							
1	4^3	6^2	4	1						
1	5^3	10^2	10	5	1					
1	6^3	15^2	20	15	6	1				
1	7^3	21^2	35	35	21	7	1			
1	8^3	28^2	56	70	56	28	8	1		
1	9^3	36^2	84	126	126	84	36	9	1	
1	10^3	45^2	120	210	252	210	120	45	10	1

נתן להבחין כי מ 1^3 עד 9^3 פחות מ 1^3 עד $3^3 \Rightarrow 45^2 - 6^2$

במילים אחרות

יכולים לקרוא ישירות ...

$$4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 = 45^2 - 6^2$$

ויכולים **גם** לחשב ...

$$45^2 - 6^2 = (45 + 6)(45 - 6) = 51 \times 39$$

בקיצור : מ 4^3 ועד $9^3 = 45^2$ פחות $6^2 = 51$ כפול 39

וכעת אני מוכן לכל אתגר הקשור בפענוח הנושא הזה.

לאמיתו של דבר ...
לאמיתו של דבר אין אנו צריכים לכל הטבלה בשלמותה,
יש להסתפק בכך ...

C ₁	C ₂	C ₁	C ₂
		11	55
1		<u>12</u>	66
2	1	13	<u>78</u>
3	3	14	91
4	6	15	105
5	10	16	120
6	15	17	136
7	21	18	153
8	28	19	171
9	36	20	190
10	45	21	210
סימן : N ₂ נמצא ב C ₂ : N ₃ נמצא ב C ₁			

לדוגמה :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78$$

אם כן גם זה נכון . . . ובלי טבלה נוספת.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3 + 11^3 + 12^3 = 78^2$$

C ₁	C ₂	C ₁	C ₂
		11	55
1		12	66
2	1	13	78
3	3	14	91
4	6	15	105
5	10	16	120
6	15	17	136
7	21	18	153
8	28	19	171
9	36	20	190
10	45	21	210
סימן : N ² נמצא ב C ₂ : N ³ נמצא ב C ₁			

ועוד דוגמה :

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78 - 21$$

$$7^3 + 8^3 + 9^3 + 10^3 + 11^3 + 12^3 = 78^2 - 21^2$$

C_1	C_2	C_1	C_2
		11	55
1		12	66
2	1	13	78
3	3	14	91
4	6	15	105
5	10	16	120
6	15	17	136
7	21	18	153
8	28	19	171
9	36	20	190
10	45	21	210
סימן : N^2 נמצא ב C_2 : N^3 נמצא ב C_1			

חשוב!

עצה אחרונה!

כעת יש לדאוג לבילוי המתמטי.

ואין בילוי ללא משחקים.

ובכן עליך ליצור משחק קסום, מכל מה שלמדת בספר זה.

דעתי! שאתה לא תתחרט, והפסד זמןך לא יהיה לחינם.

תנסה! אתה יכול! היות כי כבר אתה שולט בנושא הבנוי

על "החשבון ללא חשבון"

פרק : חי

הנושא :

סך הריבועים, החל מ 1.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = ?$$

1^2	$(1 \times 2 \times 03) / 6$	=	1
$1^2 + 2^2$	$(2 \times 3 \times 05) / 6$	=	5
$1^2 + 2^2 + 3^2$	$(3 \times 4 \times 07) / 6$	=	14
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$	$(4 \times 5 \times 09) / 6$	=	30
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$	$(5 \times 6 \times 11) / 6$	=	55
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$	$(6 \times 7 \times 13) / 6$	=	91
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2$	$(7 \times 8 \times 15) / 6$	=	140
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$	$(8 \times 9 \times 17) / 6$	=	204
.... + 9^2	$(9 \times 10 \times 19) / 6$	=	285
.... + 10^2	$(10 \times 11 \times 21) / 6$	=	385
.... + 11^2	$(11 \times 12 \times 23) / 6$	=	506
.... + 12^2	$(12 \times 13 \times 25) / 6$	=	650
.... + 13^2	$(13 \times 14 \times 27) / 6$	=	819

מה הנוסחה?

$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2$	$(8 \times 9 \times 17) / 6$	=	204
---	------------------------------	---	-----

המספר הגדול ואת שאחריו ואת סך שני המספרים.

למשל, מ 1^2 עד $8^2 = ?$

8 הוא המספר הגדול. 9 הוא המספר שאחריו. 17 הוא סך שני המספרים.

להעיר, 17 ושני חצאיו, היות כי $9 + 8 = 17$ נמצא המספר הגדול להיות בריבוע הוא החצי הקטן של 17 (האי-זוגי).

כאשר כופלים שלושת המספרים, תמיד יש אפשרות לחלק ב 6.

ואם רוצים לחסוך עבודה, יכולים לבחון, איזה מתחלק ב 2 ואיזה מתחלק ב 3 לפני פעולת הכפל.

$(1 \times 2 \times 03) / 6$	1 2 03	=	1
$(2 \times 3 \times 05) / 6$	2 3 05	=	5
$(3 \times 4 \times 07) / 6$	3 4 2 07	=	14
$(4 \times 5 \times 09) / 6$	4 2 5 09 3	=	30
$(5 \times 6 \times 11) / 6$	5 6 11	=	55
$(6 \times 7 \times 13) / 6$	6 7 13	=	91
$(7 \times 8 \times 15) / 6$	7 8 4 15 5	=	140
$(8 \times 9 \times 17) / 6$	8 9 4 5 17	=	204
$(9 \times 10 \times 19) / 6$	9 10 3 5 19	=	285
$(10 \times 11 \times 21) / 6$	10 5 11 21 7	=	385
$(11 \times 12 \times 23) / 6$	11 12 2 23	=	506
$(12 \times 13 \times 25) / 6$	12 2 13 25	=	650

חדש!

זכינו לגלות, כי שיך למצוא סך הריבועים דרך
לוח פסקל.

בנוגע לסך הריבועים.

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
L ₁	1	1 ²			
L ₂	1	2 ²	1		
L ₃	1	3 ²	3	1	
L ₄	1	4 ²	6	4	1
L ₅	1	5 ²	10	10	5
L ₆	1	6 ²	15	20	15
L ₇	1	7 ²	21	35	35

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

בעמודה-3 אנו מגלים סך 20 + 10

האם זה שאנו מוצאים התשובה בשני תאים.

האם זאת אומרת שנקלענו לאפשרות עלובה?

ההפך הוא הנכון!

כל אחד משני תאים אלו מעיד על כת משתי הכתות.

יש כת המספרים הזוגיים, ויש כת המספרים האי-זוגיים.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 10 + 20$$

לראות סך הריבועים, מקרוב יותר!

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄		C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄		C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
L ₁	1	1				L ₁	1	1 ²				L ₁	1	1 ²			
L ₂	1	2 ²	1			L ₂	1	2	1			L ₂	1	2 ²	1		
L ₃	1	3	3	1		L ₃	1	3 ²	3	1		L ₃	1	3 ²	3	1	
L ₄	1	4 ²	6	4	1	L ₄	1	4	6	4	1	L ₄	1	4 ²	6	4	1
L ₅	1	5	10	10	5	L ₅	1	5 ²	10	10	5	L ₅	1	5 ²	10	10	5
L ₆	1	6 ²	15	20	15	L ₆	1	6	15	20	15	L ₆	1	6 ²	15	20	15
L ₇	1	7	21	35	35	L ₇	1	7 ²	21	35	35	L ₇	1	7 ²	21	35	35
L ₈	1	8 ²	28	56	70	L ₈	1	8	28	56	70	L ₈	1	8 ²	28	56	70
L ₉	1	9	36	84	126	L ₉	1	9 ²	36	84	126	L ₉	1	9 ²	36	84	126
L ₁₀	1	10	45	120	210	L ₁₀	1	10	45	120	210	L ₁₀	1	10	45	120	210
L ₁₁	1	11	55	165	330	L ₁₁	1	11	55	165	330	L ₁₁	1	11	55	165	330
120 = 8 ² + 6 ² + 4 ² + 2 ²						165 = 9 ² + 7 ² + 5 ² + 3 ² + 1 ²						זוגי לחוד, ואי-זוגי לחוד.					

לשים לב
איפה מיקום, התא השייך!

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄		C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄		C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
L ₁	1	1				L ₁	1	1 ²				L ₁	1	1 ²			
L ₂	1	2 ²	1			L ₂	1	2	1			L ₂	1	2 ²	1		
L ₃	1	3	3	1		L ₃	1	3 ²	3	1		L ₃	1	3 ²	3	1	
L ₄	1	4 ²	6	4	1	L ₄	1	4	6	4	1	L ₄	1	4 ²	6	4	1
L ₅	1	5	10	10	5	L ₅	1	5 ²	10	10	5	L ₅	1	5 ²	10	10	5
L ₆	1	6 ²	15	20	15	L ₆	1	6	15	20	15	L ₆	1	6 ²	15	20	15
L ₇	1	7	21	35	35	L ₇	1	7 ²	21	35	35	L ₇	1	7 ²	21	35	35
L ₈	1	8 ²	28	56	70	L ₈	1	8	28	56	70	L ₈	1	8 ²	28	56	70
L ₉	1	9	36	84	126	L ₉	1	9 ²	36	84	126	L ₉	1	9 ²	36	84	126
L ₁₀	1	10	45	120	210	L ₁₀	1	10	45	120	210	L ₁₀	1	10	45	120	210
L ₁₁	1	11	55	165	330	L ₁₁	1	11	55	165	330	L ₁₁	1	11	55	165	330
120 = 8 ² + 6 ² + 4 ² + 2 ²						165 = 9 ² + 7 ² + 5 ² + 3 ² + 1 ²						זוגי לחוד, ואי-זוגי לחוד.					

ואפשר לתת ביאור
למה כך יוצא לנו?
ידוע איך למצוא כל ריבוע לעצמו.

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
L ₁	1	1 ²			
L ₂	1	2	1		
L ₃	1	3 ²	3	1	
L ₄	1	4	6	4	1
L ₅	1	5 ²	10	10	5
L ₆	1	6	15	20	15
L ₇	1	7	21	35	35
L ₈	1	8	28	56	70
L ₉	1	9	36	84	126

נמצא 35 הוא סך העמודה-2 הכוללת הריבוע של 1, 3, 5.

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
L ₁	1	1			
L ₂	1	2 ²	1		
L ₃	1	3	3	1	
L ₄	1	4 ²	6	4	1
L ₅	1	5	10	10	5
L ₆	1	6 ²	15	20	15
L ₇	1	7	21	35	35
L ₈	1	8	28	56	70
L ₉	1	9	36	84	126

נמצא 56 הוא סך העמודה-2 הכוללת הריבוע של 2, 4, 6.