

דפים אלו מגישות המשולש של פסקל לכל גווניו.
 וכמובן כולל גם ליקוטים מהאינטרנט.
 אך בעיקר, כולל העבודה החדשנית
 דברים שלא חדשו אותם אחרים.

אתם מעצמכם תחושו שיש קסם מה בעולם המספרים.

ככל פצט אנו נראה

חלק א'

פתיחת הצניין,

ומאנו נצבור לחלק שאנו רוצים לעסוק בו.

כי חלק א'

צניינו להסביר היסוד שבו נבנה לוח פסקל.

עד שנגיע לדברים עמוקים יותר, יש להתחיל מההתחלה.
 והנה המשולש של פסקל, ולמה נקרא משולש.

					1							
				1	1							
			1	2	1							
		1	3	3	1							
	1	4	6	4	1							
	1	5	10	10	5	1						
1	6	15	20	15	6	1						

$$4 + 6 = 10$$

המשולש של פסקל.

חלק I

אכן כך הוא הבניין של משולש זה:
מתחילים ב "1" משני צידי המשולש.

					1						
				1		1					
			1				1				
		1						1			
	1								1		
1										1	

ואז, מתחילים לחבר כל שני תאים (באופק)
ולכתוב הסך למטה באמצע.

					1						
				1		1					
				↘		↙					
			1		2		1				
			↘		↙		↘		↙		
		1		3		3		1			
		↘		↙		↘		↙			
	1		4		6		4		1		
	↘		↙		↘		↙		↘		
1		5		10		10		5		1	

והנה המשולש של פסקל, ולמה נקרא משולש.

					1						
				1		1					
			1		2		1				
		1		3		3		1			
	1		4		6		4		1		
1		5		10		10		5		1	
1	6		15		20		15		6		1

הסך של שני תאים צמודים, נמצא למטה (באמצע) מתחתיהם.

וכן לימדונו בכיתה אודות משולש זה!

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
			1		4		6		4		1	
		1		5		10		10		5		1
	1		6		15		20		15		6	
	1		6		15		20		15		6	

וזה מה שלמדנו :

בשביל למצוא הסך 10 של שני התאים 6 ו 4 ,
יש להסתכל במספר (10) הנמצא באמצע מתחתיהם.

אבל כשהן בלוח הזה שאינם בצורת משולש..
ה 10 נמצא מתחת לשני התאים (מימין) $10 = 6 + 4$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

אנו ניעזר באותיות.

C לעמודה, **L** לשורה.

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁	C ₁₂
L ₀	1												
L ₁	1	1											
L ₂	1	2	1										
L ₃	1	3	3	1									
L ₄	1	4	6	4	1								
L ₅	1	5	10	10	5	1							
L ₆	1	6	15	20	15	6	1						
L ₇	1	7	21	35	35	21	7	1					
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
L ₉	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
L ₁₀	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
L ₁₁	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

יש להבחין בשני מהלכים שווים בערכם.

(ואילו היו המספרים נשארים בצורת משולש, היינו גם רואים הסימטריות)

אך בלוח זה אנו מוצאים הן מלמעלה למטה (בעמודות) והן באלכסון, אותו דבר
[למשל, בעמודה-1, מ 1 עד 8 .. הסך 36]!

הסימטריות

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

אנו גם יכולים להבחין, המספרים באדום!
מוצאים הסימטריות שבלוח הקודם.

פרשנות שנית שראינו בכיתה.
וזה הוגש לנו לאחר שהתחלנו ללמוד אלגברה.

$$(a + b)^1 = 1a^1 + 1b^1$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$$

וכעת ניתן לנו להבחין! אמת יש בזה מה שיש בזה!

1	1					$1a^1 + 1b^1$
1	2	1				$1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$
1	3	3	1			$1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$
1	4	6	4	1		$1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$
1	5	10	10	5	1	$1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$

לאמתו של דבר, אין מן הנכון לכתוב "1" בצמוד לאותיות (כי מובן מאליה), אלא נכתב כאן רק לעורר תשומת הלב!

והנה המשולש של פסקל, במלא הדרו.

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	הסך
$(a + b)^1 \rightarrow$	1	1									2
$(a + b)^2 \rightarrow$	1	2	1								4
$(a + b)^3 \rightarrow$	1	3	3	1							8
$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1						16
$(a + b)^5 \rightarrow$	1	5	10	10	5	1					32
$(a + b)^6 \rightarrow$	1	6	15	20	15	6	1				64
$(a + b)^7 \rightarrow$	1	7	21	35	35	21	7	1			128
$(a + b)^8 \rightarrow$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		256
$(a + b)^9 \rightarrow$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	512

ניקח לדוגמה, השורה מס' 4.

$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1
-------------------------	---	---	---	---	---

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

המשולש של פסקל.

החלק שלרשותנו, היום.

להיום, אין כאן מציאה גדולה.

מה עדיף? עבור $42 * 43$? לומר $(21 * 43)$ או לפתור $42 * 43$

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
L_1	1	1			
L_2	1	2	1		
L_3	1	3	3	1	
L_4	1	4	6	4	1
L_5	1	5	10	10	5
L_6	1	6	15	20	15
L_7	1	7	21	35	35
L_8	1	8	28	56	70
L_9	1	9	36	84	126

לאמתו של דבר, לוח זה נבנה לחיבור ולא לכפל.

למשל, חיבור $8 + 28 = 36$

רק בדרך זו (ובתכלית זו) נבנה הלוח.

אבל, מצאנו גילינו כי $5 * 6 = 30$ פעמיים 15

נמצא 15 עצמו $\frac{1}{2} (5 * 6)$

כלומר, לכפול בחצי הזוגי, שבין שני העוקבים

כך, $5 * (6 * \frac{1}{2})$

$15 = 5 * 3 =$

ראינו גם את זה!

מובן מאלי

כי כפל כל שני מספרים עוקבים

יש להסתפק לכפול התא ב 2.

למשל, איך לכפול $5 * 6$ לפי הלוח?

יש להסתפק לכפול 15 ב 2.

$15 * 2 = 30$... היינו $5 * 6$

וזה מה שנתעכב עליו תחילה

ללמוד לכפול שני מספרים עוקבים.

בהתאם ללוח, פעמיים $5 * 6 = 15$

C_0	C_1	C_2	C_2	פעמיים	תוצאות הכפל
1					
1	1				
1	2	1	1	2	$1 * 2 = 2$
1	3	3	3	6	$2 * 3 = 6$
1	4	6	6	12	$3 * 4 = 12$
1	5	10	10	20	$4 * 5 = 20$
1	6	15	15	30	$5 * 6 = 30$
1	7	21	21	42	$6 * 7 = 42$
1	8	28	28	56	$7 * 8 = 56$
1	9	36	36	72	$8 * 9 = 72$
1	10	45	45	90	$9 * 10 = 90$
1	11	55	55	110	$10 * 11 = 110$
1	12	66	66	132	$11 * 12 = 132$

איך לגלות (על לוח זה? בהסתמך בעמודה-1-2)
 לזכור כי עמודה-1 כוללת כל המספרים כולם מ 1 ועד ... (האין סוף).
 אם כן, כל שני מספרים עוקבים, מעמודה-1.
 $\frac{1}{2}$ הכפל ביניהם, נותן התא שבעמודה-2
 5 ו 6 ... חצי הכפל ביניהם

$$\frac{1}{2} (6 * 5) = 15$$

נותן התא שבעמודה-2 שהוא 15 לימין המספר 6.
 נמצא למפרע, אם אני כופל ב 2 לאיזה תא מעמודה-2
 נמצאתי מגיע למכפלה

[בכפל המספר משמאל, עם המספר שמעליו].

פשוט אני אכפול (ב 2) 15 הצמוד (לגדול שבעוקבים) ל 6
 ואני אקבל התשובה למפרע

כפל ה 6 עם ה 5.

$$5 * 6 = 30 = 15$$

5	10	10	20
6	15	15	30

לכפול שני מספרים עוקבים, כמו למשל, $12 * 11$?
 אני אכפול ב 2, ה 66 הצמוד ל 12 ואני אקבל התשובה.
 פעמיים $66 = 132$ ממש כאילו כפלתי $12 * 11 = 132$

11	55	55	110	$10 * 11 = 110$
12	66	66	132	$11 * 12 = 132$

לכפול שני מספריים עוקבים, כמו למשל, $142 * 143$?
 אני אכפול ב 2, 10153 הצמוד ל 143 ואני אקבל התשובה.
 פעמיים $10153 = 20306$ ממש כאילו כפלתי $142 * 143 = 20306$

142	10011	10011	20022	$141 * 142 = 20022$
143	10153	10153	20306	$142 * 143 = 20306$

עד כאן בעזרת הלוח!

ובלי לוח

ובלי לוח, איך אפשר לכפול שני מספרים עוקבים?
 יש לראות הקשר בין שתי שאלות אלו.

מהו סך מ 1 ועד 9?

$$10 * 9 = ?$$

הידעת כי התשובה לשאלה-א $= \frac{1}{2}$ התשובה לשאלה-ב?

$$9 * 10/2 = 9 \text{ ועד } 45$$

$$9 * 10 = 90$$

אכן מה עדיף?

$$42 * 43 ?$$

האם עדיף לומר

$$21 * 43 \text{ ואחר כך לכפול } 2 ?$$

$$21 * 43 = 903 ; 903 * 2 = 1806$$

או עדיף לומר
 $43 * 42$
 ולפתור פעולת הכפל?
 $1806 = 43 * 42$

הנה למשל,

9			
10	45	45	90

אנו יודעים כי 45 הוא סך העמודה-1 עד 9.

אם נכפול 45 ב 2, נקבל המכפלה של $10 * 9$
 $90 = 10 * 9 = (9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) * 2$

ובלי לוח, איך אפשר לכפול שני מספרים עוקבים?
 למשל, $15 * 14 = ?$

$$14 = n$$

הבה ונבדוק!

$$? = 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

לימדו אותי הנוסחה

$$\frac{1}{2} * n + n + 1$$

וגם לימדו אותי, כי כל מקום שיש $n+1$

ביאורו, המספר שבא אחרי n (במילים שלנו, המספר העוקבי)

כלומר למצוא סך

$$? = 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

עלי לכפול $14 * 13$ ולמצוא החצי.

$$91 = 14 * 13$$

$$182 = 14 * 13 = 91 * 2$$

בקיצור

$$105 = (15 * 14 / 2) = 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

בכך אני מגיע לסך העמודה-1 מ 1 ועד 14

כלומר, המספר האמור להיות צמוד ל 15

$$105 = 15 * 14$$

14			
15	105	105	210

אם נכפול 105 ב 2, נקבל המכפלה של $15 * 14$

$$210 = 15 * 14 = (14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) * 2$$

ובלי לוח, איך אפשר לכפול שני מספרים עוקבים?
 למשל, $57 * 56 = ?$

$$56 = n$$

הבה ונבדוק!

$$? = 56 + 55 + 54 + 53 \dots 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

כלומר למצוא סך

$$? = 56 + 55 + 54 + 53 \dots 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

עלי לכפול $56 * 57$ ולמצוא החצי.

בקיצור

$$1596 = 57 * 28 = 56 + 55 + 54 + 53 \dots 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

בכך אני מגיע לסך העמודה-1 מ 1 ועד 56

כלומר המספר האמור להיות צמוד ל 57 $1596 = 57$

56			
57	1596	1596	3192

אם נכפול 1596 ב 2, נקבל המכפלה של $56 * 57$

$$3192 = 57 * 56 = (56 + 55 + 54 + 53 \dots 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1) 2$$

נחזור על השאלה, אבל מקרוב יותר!

ובלי לוח, איך אפשר לכפול שני מספרים עוקבים?

$$? = 15 * 14, \text{ למשל}$$

$$210 = 15 * 14$$

$$210 = 15 - 15^2$$

$$210 = 14 + 14^2$$

C_0	C_1	C_2		
1				
1	1			
1	2	1		
1	3	3		
1	4	6		
1	5	10	$5^2 + 5 = 30$	החצי = 15
1	6	15	$6^2 - 6 = 30$	החצי = 15
1	7	21		
1	8	28	$8^2 + 8 = 72$	החצי = 36
1	9	36	$9^2 - 9 = 72$	החצי = 36
1	10	45		
1	11	55	$11^2 + 11 = 132$	החצי = 66
1	12	66	$12^2 - 12 = 132$	החצי = 66

איני יודע אם דברים אלו מצויים בספרים כל שהם. אכן כדאי לפרסם
האתר שלנו, ולזכות לאותם שהיו מוכנים לפסל זכות לידיע חדשני זה!

האט תוכלו לעשות זאת שפילי?
אפשר בכלל החברים שלכם,
יש המתעניינים
במה שאנו עוסקים בו?

שתצליחו, בהקנת החומר ובפרסומו!

נא להביע חוות דעתכם
etgaim77@outlook.com
או להעיר הערות, או להציע הצעות.