

דפים אלו מגישות המשולש של פסקל לכל גוונים.
 וכמובן כולל גם ליקוטים מהאינטרנט.
 אך בעיקר, כולל העבודה החדשנית
 דברים שלא חדשו אותם אחרים.

אתם מעצמכם תחושו שיש קסם מה בעולם המספרים.

ככל פצט אנו נראה

חלק א'

פתיחת הצניין,

ומאנו נצבור לחלק שאנו רוצים לעסוק בו.

כי חלק א'

צניינו להסביר היסוד שבו נבנה לוח פסקל.

עד שנגיע לדברים עמוקים יותר, יש להתחיל מההתחלה.
 והנה המשולש של פסקל, ולמה נקרא משולש.

					1							
				1	1							
			1	2	1							
		1	3	3	1							
	1	4	6	4	1							
1	5	10	10	5	1							
1	6	15	20	15	6	1						

$$4 + 6 = 10$$

המשולש של פסקל.

חלק I

אכן כך הוא הבניין של משולש זה:
מתחילים ב "1" משני צידי המשולש.

					1						
				1		1					
			1				1				
		1						1			
	1								1		
1										1	

ואז, מתחילים לחבר כל שני תאים (באופק)
ולכתוב הסך למטה באמצע.

					1						
				1		1					
				↘		↙					
			1		2		1				
			↘	↙	↘	↙	↘	↙			
		1		3		3		1			
		↘	↙	↘	↙	↘	↙	↘	↙		
	1		4		6		4		1		
	↘	↙	↘	↙	↘	↙	↘	↙	↘	↙	
1		5		10		10		5		1	

והנה המשולש של פסקל, ולמה נקרא משולש.

					1						
				1		1					
			1		2		1				
		1		3		3		1			
	1		4		6		4		1		
1		5		10		10		5		1	
1	6		15		20		15		6		1

הסך של שני תאים צמודים, נמצא למטה (באמצע) מתחתיהם.

וכן לימדונו בכיתה אודות משולש זה!

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
			1		4		6		4		1	
		1		5		10		10		5		1
	1		6		15		20		15		6	
	1		6		15		20		15		6	

וזה מה שלמדנו :

בשביל למצוא הסך 10 של שני התאים 6 ו 4,
יש להסתכל במספר (10) הנמצא באמצע מתחתיהם.

אבל כשהן בלוח הזה שאינם בצורת משולש..
ה 10 נמצא מתחת לשני התאים (מימין) $10 = 6 + 4$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

אנו ניעזר באותיות.

C לעמודה, **L** לשורה.

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁	C ₁₂
L ₀	1												
L ₁	1	1											
L ₂	1	2	1										
L ₃	1	3	3	1									
L ₄	1	4	6	4	1								
L ₅	1	5	10	10	5	1							
L ₆	1	6	15	20	15	6	1						
L ₇	1	7	21	35	35	21	7	1					
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
L ₉	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
L ₁₀	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
L ₁₁	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

יש להבחין בשני מהלכים שווים בערכם.

(ואילו היו המספרים נשארים בצורת משולש, היינו גם רואים הסימטריות)

אך בלוח זה אנו מוצאים הן מלמעלה למטה (בעמודות) והן באלכסון, אותו דבר
[למשל, בעמודה-1, מ 1 עד 8 .. הסך 36]!

הסימטריות

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

אנו גם יכולים להבחין, המספרים באדום!
מוצאים הסימטריות שבלוח הקודם.

פרשנות שנית שראינו בכיתה.
וזה הוגש לנו לאחר שהתחלנו ללמוד אלגברה.

$$(a + b)^1 = 1a^1 + 1b^1$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$$

וכעת ניתן לנו להבחין! אמת יש בזה מה שיש בזה!

1	1					$1a^1 + 1b^1$
1	2	1				$1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$
1	3	3	1			$1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$
1	4	6	4	1		$1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$
1	5	10	10	5	1	$1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$

לאמתו של דבר, אין מן הנכון לכתוב "1" בצמוד לאותיות (כי מובן מאליה), אלא נכתב כאן רק לעורר תשומת הלב!

והנה המשולש של פסקל, במלא הדרו.

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	הסך
$(a + b)^1 \rightarrow$	1	1									2
$(a + b)^2 \rightarrow$	1	2	1								4
$(a + b)^3 \rightarrow$	1	3	3	1							8
$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1						16
$(a + b)^5 \rightarrow$	1	5	10	10	5	1					32
$(a + b)^6 \rightarrow$	1	6	15	20	15	6	1				64
$(a + b)^7 \rightarrow$	1	7	21	35	35	21	7	1			128
$(a + b)^8 \rightarrow$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		256
$(a + b)^9 \rightarrow$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	512

ניקח לדוגמה, השורה מס' 4.

$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1
-------------------------	---	---	---	---	---

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

המשולש של פסקל.

החלק שלרשותנו, היום.

סוף סוף, כל ריבוע, הנו כפל.

אנו נתחיל מהריבוע 55^2 ונעבור ממנו לדומה, ולדומה לדומה.

$$55 \times 55 = ??$$

$$54 \times 56 = ??$$

$$53 \times 57 = ??$$

$$52 \times 58 = ??$$

$$51 \times 59 = ??$$

צד שמאל של כל מכפלה מאלו, מרומז בלוח שלנו.

הבא נראה כל הפעולות השייכות ל 5-5 (אחדות)

ואחר כך נראה איך לגלות צד שמאל של אותן פעולות לפי הלוח.

הכל בלוח אחד!

מימין לשמאל.

העשרות זהות בשני הכופלים (עם אחדות 5)				
C_1	C_2	$2 \div$	=	
2	1	$2 \div$	2	$02 \ 25 = 15 * 15$
3	3	$2 \div$	6	$06 \ 25 = 25 * 25$
4	6	$2 \div$	12	$12 \ 25 = 35 * 35$
5	10	$2 \div$	20	$20 \ 25 = 45 * 45$
6	15	$2 \div$	30	$30 \ 25 = 55 * 55$
7	21	$2 \div$	42	$42 \ 25 = 65 * 65$
8	28	$2 \div$	56	$56 \ 25 = 75 * 75$
9	36	$2 \div$	72	$72 \ 25 = 85 * 85$
10	45	$2 \div$	90	$90 \ 25 = 95 * 95$
11	55	$2 \div$	110	$110 \ 25 = 105 * 105$
12	66	$2 \div$	132	$132 \ 25 = 115 * 115$
13	78	$2 \div$	156	$155 \ 25 = 125 * 125$
14	91	$2 \div$	182	$182 \ 25 = 135 * 135$
15	105	$2 \div$	210	$210 \ 25 = 145 * 145$

ברור! כי לכל הפעולות, צד ימין של המכפלה = 25

וצד שמאל = פעמיים עמודה-2.

כאן, אנו בונים עמודה-2 מצד שמאל של המכפלה.

למשל,

7	21	$2 \div$	42	$42 \ 25 = 65 * 65$
---	----	----------	----	---------------------

אותו 42 חציו 21 נתון בעמודה-2

וכן, אנו יכולים להתחיל מלוח פסקל, עמודה-2 ולכפול ב 2.

ואז נדע כמה צריך לצד שמאל.

למשל, (משמאל לימין)

7	21	$\times 2$	42	$42 \ 25 = 65 * 65$
---	----	------------	----	---------------------

צד ימין של המכפלה, אינו משתנה.

הוא תמיד = 25.

משמאל לימין

C_1	C_2	$x2$	=	העשרות זהות בשני הכופלים (עם אחדות 5)
2	1	$x2$	2	$02\ 25 = 15 * 15$
3	3	$x2$	6	$06\ 25 = 25 * 25$
4	6	$x2$	12	$12\ 25 = 35 * 35$
5	10	$x2$	20	$20\ 25 = 45 * 45$
6	15	$x2$	30	$30\ 25 = 55 * 55$
7	21	$x2$	42	$42\ 25 = 65 * 65$
8	28	$x2$	56	$56\ 25 = 75 * 75$
9	36	$x2$	72	$72\ 25 = 85 * 85$
10	45	$x2$	90	$90\ 25 = 95 * 95$
11	55	$x2$	110	$110\ 25 = 105 * 105$
12	66	$x2$	132	$132\ 25 = 115 * 115$
13	78	$x2$	156	$155\ 25 = 125 * 125$
14	91	$x2$	182	$182\ 25 = 135 * 135$
15	105	$x2$	210	$210\ 25 = 145 * 145$

לפעולה $65 * 65 = 25 ??$; עדיף לעגל ל 70 ... ובתא ליד 7 אני אמצא 21 ... ל 42 .

איך משתמשים בלוח, בעמודה-2?

למשל $42\ 25 = 65 * 65$

איך להגיע ל 42 בעזרת הלוח?

65 הוא מספר בין 60 ל 70

לזכור, לעגל ל 70 ... ל 7

ואז בשורה-7 אני אמצא 21

פעמיים $21 = 42$. כלומר $42\ 25$

עבור 65^2

עוד אפשרות

L_6	1	6	15	20
L_7	1	7	21	35

ל $65 * 65$

לפנות לשורה-6

ולהסתכל באלכסון המוביל אותי ל 21.

הנה, עסקנו ב $55 * 55$

בשמירת ה 5 באחדות.

ובשמירת העשרות הזהות.

ועברנו על כל אלו המספרים.

$15^2, 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, 65^2, 75^2, 85^2, 95^2, 105^2, \dots$

אלא שאנו הגשנו כל זה בדרך כפל, כמו $20\ 25 = 45 * 45$

והיה עלינו למצוא צד שמאל דרך הלוח.

כעת נעבור לשלב אחר עם 55×55
 אנו נמשיך בשמירת העשרות הזהות.
 אך, תחליף ה 5 באחדות
 אנו נעזר בשתי אחדות בסך 10
 $1 + 9$ או $2 + 8$ או $3 + 7$ או $4 + 6$
 למשל, $56 \underline{24} = 76 \underline{*} 74$
 גם כאן, אפשר דרך הלוח שלנו להגיע ל 56.

הבא ונראה כל הפעולות כאשר המספרים 4 ו 6 באחדות.
 ואחר כך נראה איך להגיע לצד שמאל של אותן פעולות דרך הלוח.
 הכל בלוח אחד!

משמאל לימין

C_1	C_2	$\times 2$	=	העשרות זהות בשני הכופלים (עם אחדות 4 ו 6)
2	1	$\times 2$	2	$02 \underline{24} = 16 \underline{*} 14$
3	3	$\times 2$	6	$06 \underline{24} = 26 \underline{*} 24$
4	6	$\times 2$	12	$12 \underline{24} = 36 \underline{*} 34$
5	10	$\times 2$	20	$20 \underline{24} = 46 \underline{*} 44$
6	15	$\times 2$	30	$30 \underline{24} = 56 \underline{*} 54$
7	21	$\times 2$	42	$42 \underline{24} = 66 \underline{*} 64$
8	28	$\times 2$	56	$56 \underline{24} = 76 \underline{*} 74$
9	36	$\times 2$	72	$72 \underline{24} = 86 \underline{*} 84$
10	45	$\times 2$	90	$90 \underline{24} = 96 \underline{*} 94$
11	55	$\times 2$	110	$110 \underline{24} = 106 \underline{*} 104$
12	66	$\times 2$	132	$132 \underline{24} = 116 \underline{*} 114$
13	78	$\times 2$	156	$155 \underline{24} = 126 \underline{*} 124$
14	91	$\times 2$	182	$182 \underline{24} = 136 \underline{*} 134$
15	105	$\times 2$	210	$210 \underline{24} = 146 \underline{*} 144$

לפעולה $64 \times 66 = 24 \text{ ??}$; עדיף לעגל 64 או 66 ל 70 ... ובתא ליד 7 אני אמצא 21 ... ל 42 .
 ומוכן מאליי כי ניתן לעשות $24 = 4 \times 6$ כאשר העשרות זהות.

לא נראה צורך להסבר,

מה שעשינו עבור אחדות 5 ו 5 אפשר לעשות עבור 4 ו 6.

6	15	$\times 2$	30	$30 \underline{24} = 56 \underline{*} 54$
7	21	$\times 2$	42	$42 \underline{24} = 66 \underline{*} 64$

אם התרגיל הוא ... $66 \times 64 = 24 \text{ ??}$

או שנעגל (64 או 66) ל 70 ולעבור לשורה 7

ואז כופלים $21 \times 2 = 42$ וזהו! יש לנו צד שמאל, דרך הלוח!

או שנפנה לשורה 6 ואז יהיה צורך למצוא התא 21

באלכסון עם התא 6.

L_6	1	6	15	20
L_7	1	7	21	35

מ $55 * 55$.. נעבור ל $47 * 43$
 אנו שמרנו על סך האחדות, 10.
 אנו שמרנו על העשרות הזהות.
 ולכן יש לצפות כי, דרך הלוח שלנו נוכל להגיע לצד שמאל של המכפלה.

$$20 \ 21 = 47 * 43$$

משמאל לימין

C_1	C_2	$x2$	=	העשרות זהות בשני הכופלים (עם אחדות 3 ו 7)
2	1	$x2$	2	$02 \ 21 = 17 * 13$
3	3	$x2$	6	$06 \ 21 = 27 * 23$
4	6	$x2$	12	$12 \ 21 = 37 * 33$
5	10	$x2$	20	$20 \ 21 = 47 * 43$
6	15	$x2$	30	$30 \ 21 = 57 * 53$
7	21	$x2$	42	$42 \ 21 = 67 * 63$
8	28	$x2$	56	$56 \ 21 = 77 * 73$
9	36	$x2$	72	$72 \ 21 = 87 * 83$
10	45	$x2$	90	$90 \ 21 = 97 * 93$
11	55	$x2$	110	$110 \ 21 = 107 * 103$
12	66	$x2$	132	$132 \ 21 = 117 * 113$
13	78	$x2$	156	$155 \ 21 = 127 * 123$
14	91	$x2$	182	$182 \ 21 = 137 * 133$
15	105	$x2$	210	$210 \ 21 = 147 * 143$

לפעולה $63 * 67 = 21 ??$; עדיף לעגל 63 או 67 ל 70 ... ובתא ליד 7 אני אמצא 21 ... ל 42 .
 וללא ביאור ניתן להבין הלוח!

משמאל לימין

C_1	C_2	$x2$	=	העשרות זהות בשני הכופלים (עם אחדות 2 ו 8)
2	1	$x2$	2	$02 \ 16 = 18 * 12$
3	3	$x2$	6	$06 \ 16 = 28 * 22$
4	6	$x2$	12	$12 \ 16 = 38 * 32$
5	10	$x2$	20	$20 \ 16 = 48 * 42$
6	15	$x2$	30	$30 \ 16 = 58 * 52$
7	21	$x2$	42	$42 \ 16 = 68 * 62$
8	28	$x2$	56	$56 \ 16 = 78 * 72$
9	36	$x2$	72	$72 \ 16 = 88 * 82$
10	45	$x2$	90	$90 \ 16 = 98 * 92$
11	55	$x2$	110	$110 \ 16 = 108 * 102$
12	66	$x2$	132	$132 \ 16 = 118 * 112$
13	78	$x2$	156	$155 \ 16 = 128 * 122$
14	91	$x2$	182	$182 \ 16 = 138 * 132$
15	105	$x2$	210	$210 \ 16 = 148 * 142$

לפעולה $62 * 68 = 16 ??$; עדיף לעגל 62 או 68 ל 70 ... ובתא ליד 7 אני אמצא 21 ... ל 42 .

איך דרך הלוח שלנו, אפשר למצוא צד שמאל למכפלה
עבור התרגיל

$$16 = 138 * 132$$

L ₁₂	1	12	66	220
L ₁₃	1	13	78	286
L ₁₄	1	14	91	364

כאשר מעגלים 138 ל 140 ל 14, עוברים לשורה 14.

$$182 = 2 * 91$$

$$182 \underline{16} = 138 * 132 \text{ ואז}$$

משמאל לימין

C ₁	C ₂	x2	=	העשרות זהות בשני הכופלים (עם אחדות 2 ו 8)
2	1	x2	2	02 09 = 19 * 11
3	3	x2	6	06 09 = 29 * 21
4	6	x2	12	12 09 = 39 * 31
5	10	x2	20	20 09 = 49 * 41
6	15	x2	30	30 09 = 59 * 51
7	21	x2	42	42 09 = 69 * 61
8	28	x2	56	56 09 = 79 * 71
9	36	x2	72	72 09 = 89 * 81
10	45	x2	90	90 09 = 99 * 91
11	55	x2	110	110 09 = 109 * 101
12	66	x2	132	132 09 = 119 * 111
13	78	x2	156	155 09 = 129 * 121
14	91	x2	182	182 09 = 139 * 131
15	105	x2	210	210 09 = 149 * 141

לפעולה 61 * 09 = ?? ; עדיף לעגל 61 או 96 ל 70 ... ובתא ליד 7 אני אמצא 21 ... ל 42 .

אם שייך להרחיק לכת?

עם אחדות = 9?

למה לא?

42	$41 \underline{4} = 69 * \underline{6}$
----	---

פעולה כזו, דורשת מאתנו

לעשות $41 = 1 - 42$

אודות $4 + 6$ המשלימות ל 10 כאשר כופלים מספר עם 9

את זה אנו כבר מכירים!

עבור האחדות, אין צורך להתעכב!

משמאל לימין

C ₁	C ₂	x2	1-	העשרות (עם 9) זהות למכפיל
2	1	x2	2	01 9 = 19 * 1
3	3	x2	6	05 8 = 29 * 2
4	6	x2	12	11 7 = 39 * 3
5	10	x2	20	19 6 = 49 * 4
6	15	x2	30	29 5 = 59 * 5
7	21	x2	42	41 4 = 69 * 6
8	28	x2	56	55 3 = 79 * 7
9	36	x2	72	71 2 = 89 * 8
10	45	x2	90	89 1 = 99 * 9
11	55	x2	110	109 0 = 109 * 10
			2-	
12	66	x2	132	130 9 = 119 * 11
13	78	x2	156	154 8 = 129 * 12

לפעולה $6 * 69 = 4 ??$; עדיף לעגל 69 ל 70 ... ובתא ליד 7 אני אמצא 21 ... ל 42 .. ל 41.

רגע! כולנו עדיין זוכרים כי כל מספר הנכפל ב 9

אנו נקבל "המספר המשלים" באחדות.

למשל,

$$63 = 7 * 9$$

$$396 = 44 * 9$$

$$392 = 49 * 8$$

ואם רוצים לפעול אחרת.

העשרות עם 9 זהות למכפיל :

למשל, עשרות המכפיל 69 = 6 , והמכפיל 6 =

6	15	2÷	30	29 5 = 59 * 5
7	21	2÷	42	41 4 = 69 * 6

מה השייכות בין 6 ל 21?

מה זה 6 ?

6 נהפך להיות 69

$$41 \underline{4} = 69 * \underline{6}$$

מה שיש לדעת (ללא חשבון) ללא היסוסים.

1 5 * 1 5 2 25	2 5 * 2 5 6 25	3 5 * 3 5 12 25	4 5 * 4 5 20 25	5 5 * 5 5 30 25	6 5 * 6 5 42 25	7 5 * 7 5 56 25	8 5 * 8 5 72 25	9 5 * 9 5 90 25
11 5 * 11 5 132 25	12 5 * 12 5 156 25	13 5 * 13 5 182 25	14 5 * 14 5 210 25	15 5 * 15 5 240 25	16 5 * 16 5 272 25	17 5 * 17 5 306 25	18 5 * 18 5 342 25	19 5 * 19 5 380 25

כבר ראינו, איפה זה טמון בלוח שלנו?
למשל,

$$\begin{array}{r} 6 \ 5 \\ * 6 \ 5 \\ \hline 42 \ 25 \end{array}$$

כי $21 * 2 = 42$

ומשורה-6 מגיעים ל 21

L ₆	1	6	15
L ₇	1	7	21
L ₈	1	8	28

איני יודע אם דברים אלו מצויים בספרים כל שהם. אכן כדאי לפרסם
האתר שלנו, ולזכות לאותם שהיו מוכנים לשלם לזכות לידע חדשני זה!

האם תוכלו לעשות זאת שביאי?
אפשר ככלל החברים שלכם,
יש המתעניינים
במה שאנו עוסקים בו?

שתצליחו, בהקנת החומר ובפרסומו!

נא להביע חוות דעתכם
etgaim77@outlook.com
או להעיר הערות, או להציע הצעות.