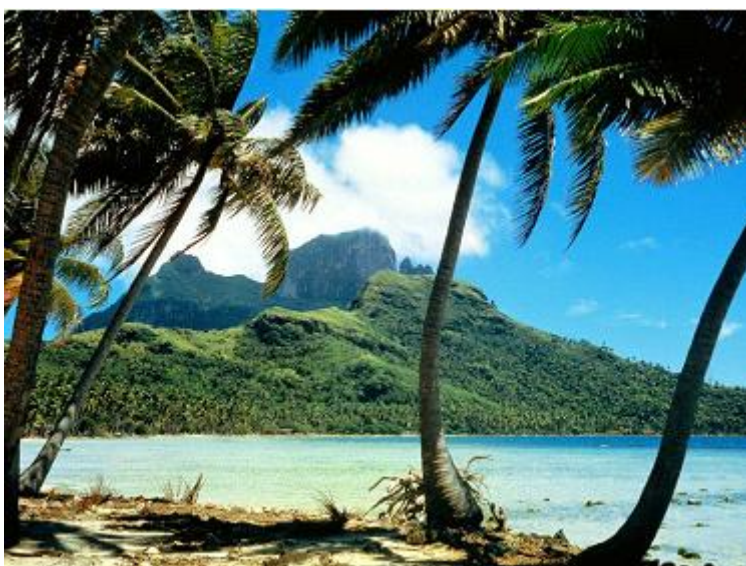


קוראים לו

יוסילה מתמטיקה.

ברוכים הבאים לעולם
"החשבון לא חשבון"

לפנינו ספור אודות נער שמצא עצמו על אי בודד. ובסופו של דבר
גילה כי בקצה האי ההיא קיימת איזה עיירה, אלא שאנשיה
קצת מוזרים.
ושם פגש במשפחה שאכסנה אותו להיות כאחד מהם.



אנו נהיה עדים לכל מה שעבר עליו בעיר ההיא.
ונראה מקרוב הפלאי-פלאים שבחשבון ללא חשבון
שנתגלו לו בחיותו ביניהם.



הקדמה אודות "החשבון ללא חשבון"

כשאומרים "חשבון ללא חשבון" אין הכוונה שאין כאן חשבון כלל, אלא המדובר אודות פעולת חשבון כה זעירה עד שילד קטן יכול לתת תשובה לפעולת חשבון כזו. ניקח למשל לוח הכפל של "99" ונראה ביחד כמה זמן ומאמצים אתה צריך להשקיע?

$$\text{למשל: } 4356 \div 99 = ?$$

בבקשה תיגש למהלכי ה"חשבון" שאתה מכיר ורגיל! ...
סיימת?

האתגר שבדף זה:

לחת לילד קטן לפתור לנו הפעולה " $4356 \div 99 = ?$ "

↩ תוך שניה אחת, בבקשה!

וכעת, בא ונפתור אותו תרגיל "בחשבון ללא חשבון"

אני מסתכל על המספר "4356"

כן מסתכל כך! "4356"

וכל מה שיש לעשות הוא להוסיף "ועוד אחד"

אני חושב, כי אפילו ילד קטן יכול לפתור לנו תרגיל מסובך זה.

$$4356 \div 99 = 44$$

פרק א'

הצעה טובה!

דו שיח בין בלחשב ליוסילה.

יוסילה: כמה רציתי להכיר את כל מה שיודעים בעיירה שלכם!

בלחשב: אני חושב שכבר הודעתי לך כי אצלנו, בעיירה שלנו, כל אחד ואחד מסדר לו פולחן עצמאי, פולחן משלו.

יוסילה: מה למשל?

בלחשב: למשל... מה למשל? אני אקח אותך איתי לבקר אצל החברים שלי, ואז תכיר הפולחן של כל אחד מהם.

רמיזה: האם אני יכול להצטרף עמכם?

בלחשב: לא תמיד ... אבל, כן! ובפרט אם לחבר שאצלו אנו מבקרים יש אח או אחות קטנים.

יוסילה: ובכן אצל מי אנו מבקרים היום?

בלחשב: אה! כבר מהיום אתה רוצה להתחיל?

יוסילה: אם יש לך תוכנית... בבקשה.

בלחשב: לא אין לי שום תוכנית. רק תן לי לחשוב רגע, ואז אגיד לך למי פנינו מועדות.

ובלחשב לוקח לו כמה רגעים של מחשבה.

בלחשב: כן !!! אנו נבקר אצל מבחין. יש לי חבר שקוראים לו מבחין... והוא מבחין טוב בענייני

המספרים. אנו ניקח איתנו רמיזה, איני בטוח שהוא ייהנה, ואפשר שישעמם לו.

רמיזה: אל תדאג לשעמום שלי, להיות לבד כאן בבית, זה ישעמם יותר!

ושלושת החברים שלנו עושים דרכם לביתו של מבחין... והנה הם הגיעו.

בלחשב: שלום מבחין, הנה הבאתי לך אורח מהעולם הגדול.

מבחין: ברוכים הבאים, ופונה ליוסילה מה שלום העולם הגדול?

יוסילה: שמי יוסילה, ואני שמח לבקר אצל החברים של בלחשב. הוא סיפר לי כי יש לך פולחן

על "החשבון ללא חשבון" וזה מה שבאתי לראות, היות כי אני סקרן להכיר דרכי עולם המתמטי

שלכם אודות "החשבון ללא חשבון"

מבחין: בשמחה! אני אראה לך במה אני עוסק כעת. רק שרוצה להגיד לך כי מה שאמר לך

בלחשב אינו האמת לאמתו. כאן לא כולנו עוסקים בחשבון ללא חשבון. כי רק היות ושמו בל-

חשב רואה בכל פולחן "החשבון ללא חשבון" אך אנו מגלים דרכים. דרכי הטבע של המספרים.

איך הנם מסודרים בדרך הקבועה להם. 8 לחלק ב 2 תקבל תמיד 4. אף פעם לא תקבל משהו

אחר... ומה שאתה מוצא בפעולה של 8 ו 2 אתה תוכל למצוא בפעולות גדולות יותר... יש

תחומים שהסקרנות מתעוררת, וזה מושך אותך לשקוע בנושא שלפניך, ואז הסקרנות נענית

בגילויים מדהים. כי תמיד יש משהו מדהים שאפשר לגלותו בעולם המספרים.

יוסילה: אני רואה את המסר שאתה רוצה להעביר. זה כשלעצמו מוטיבציה לאהוב המספרים.

בלחשב: בסדר אדון מבחין! אז עולם המספרים הוא רק למי שרוצה להיות מבחין בו!

וכולם צוחקים.

מבחין: ודווקא אני אקח לי לדוגמה ה "כפול ב 9"

$9 \times 7 = 63$ אז מה עשינו... $9 \times 7 = 063$ אנו מסתכלים על 07 ואומרים $7 < 0$ אכן יש לצפות כי

סך שלושת הספרות שבתשובה $9 = 0 + 6 + 3$ (ולא 18) ומתחילים להבחין ב...

$$10 = 3 + 7$$

$$6 = 1 - (0 -)$$

$$9 = 0 + 6 + 3$$

אותה ספרה משמאל. אותו 0 הנמצא שמאל ל 07, נמצא שמאל ל 063.

וכל זה כי $0 < 7$

$$063 = 07 \times 9$$

$$063 = 07 \times 9$$

$$063 = 07 \times 9$$

$$063 = 07 \times 9$$

$$063 = 07 \times 9$$

ולאחר הבחנה קטנה זו אתה יכול לעבור עם אותה הבחנה ל...

ל $17 \times 9 = ?$ ל $27 \times 9 = ?$ ל $37 \times 9 = ?$ ל $47 \times 9 = ?$ ל $57 \times 9 = ?$ ל $67 \times 9 = ?$
 לדוגמה:

מבחינים כי $423 = 47 \times 9$ $10 = 3 + 7$
 מבחינים כי $423 = 47 \times 9$ $42 = 4 - 46 \dots 46 = 1 - 47$
 מבחינים כי $423 = 47 \times 9$ $9 = 4 + 2 + 3$
 מבחינים כי $423 = 47 \times 9$ אותה ספרה משמאל. (אותו 4)
 מבחינים כי $423 = 47 \times 9$ וכל זה כי $4 < 7$

ולאחר הבחנה קטנה זו אתה יכול להבחין כי לא מדובר באחדות שהם $7 =$ אלא לכל האחדות החל מ 2 הגדול מ 1 ... בכל "אחדות" שערכם "גדולה מהעשרות", אתה תמצא אותה הבחנה. האין זה ...

1	2	3	4	5	6	7	8	8
89	79	69	59	49	39	29	19	09
78	68	58	48	38	28	18	08	
67	57	47	37	27	17	07		
56	46	36	62	16	06			
45	35	25	15	05				
34	24	14	04					
23	13	03						
12	02							
01								

יוסילה: כן זה מאוד נכון ומעניין. כל מספר מאלו, ניתן לכפול ב 9, ולהבחין בו מה שראינו ב 47 כפול 9.

מבחין: וכעת אני אראה לך הפולחן שאני משתדל להשלים. אני מגלה הקשר שבין המספר האי-זוגי ולבין המספרים בריבוע.

יוסילה: מה אתה שח? אלו הם שני עולמות נפרדים. איפה 1, 3, 5, 7, 9, ... עם $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ בלחשב: אל תתפלא יוסילה, כאן אצלנו אתה צריך לצפות מה שלא חושבים עליו בעולם הגדול. מבחין: $1 + 3$, כמה זה? יוסילה: 4!

מבחין: האין זה 2^2 ? נמשיך הלאה ועוד 5 (כלומר $1 + 3 + 5$) יוסילה: $4 + 5 = 9$!

מבחין: האין זה 3^2 ? נמשיך הלאה ועוד 7 (כלומר $1 + 3 + 5 + 7$) יוסילה: יש לי 9 ועוד 7 ... זה 16 שהוא 4^2 . מעניין! מבחין: תסתכל בלוח הזה

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2

השורה העליונה המספרים האי-זוגיים, והשורה התחתונה המספרים בריבוע.

יוסילה: אני כבר לא צריך הסברים ... 1 אם תיתן לו 3 יהיה $4 = 2^2$ וכן אם אותו 4 תיתן לו 5 יהיה $9 = 3^2$ וכן אם אותו 9 תיתן לו 7 יהיה $16 = 4^2$ וכן הלאה. מבחין: אני רואה שיש לך תפיסה טובה ... לא חיכתה להסברים.

בלחשב : אכן היה שווה הביקור. למדנו דבר מה!

מבחין : ועוד אגלה לכם סוד בעולם הריבוע.

$8^2 = 64$ בואו ונעשה "פחות 1" ונקבל 63 ... מה שייכות 63 עם ה 8 ?

הנה ! $63 = (1 - 8) (1 + 8)$

$43^2 = 1849$ בואו ונעשה "פחות 1" ונקבל 1848 ... מה שייכות 1848 עם ה 43 ?

הנה ! $1848 = (1 - 43) (1 + 43)$

אם צריכים הסבר?

בלחשב : מובן, כי מספר מסוים בריבוע פחות 1 נותן לנו המכפלה, לפעולת הכפל "המספר

הקודם לו, במספר שבא אחריו" (כי תמיד פחות-1 מובנו המספר הקודם. וכן ועוד-1 מובנו המספר הבא אחריו).

לדוגמה : $12^2 = 144$ אכן 143 יהיה שווה ל 11 כפול 13.

מבחין : האם יש בכך כוח להרחיק לכת בעניין?

יוסילה : תגיד מה שיש לך, ואם באמת לא נוכל להבין אותך ... אנו נודיע לך !

מבחין : אתם מזכירים לי בפולחן אחר שקדם לזה. בו הבחנתי השייכות "כפל - ריבוע".

יוסילה : כן !? יש לך פולחן אחר להראות לנו ... אדרבא ... אנו נשמח להתעכב לראות גם את זה.

מבחין : נכנס לחדר, ומוציא משם תיק מלא ניירות. בסדר ! מה יש לנו כאן ?

$8^2 = 64$, - 1 והנה ! $63 = (1 - 8) (1 + 8)$

עכשיו נעשה פחות 4 כלומר פחות 2 (אבל בריבוע)

$8^2 = 64$, - 4 והנה ! $60 = (2 - 8) (2 + 8)$

עכשיו נעשה פחות 9 כלומר פחות 3 (אבל בריבוע)

$8^2 = 64$, - 9 והנה ! $55 = (3 - 8) (3 + 8)$

עכשיו נעשה פחות 16 כלומר פחות 4 (אבל בריבוע)

$8^2 = 64$, - 16 והנה ! $48 = (4 - 8) (4 + 8)$

עכשיו נעשה פחות 25 כלומר פחות 5 (אבל בריבוע)

$8^2 = 64$, - 25 והנה ! $39 = (5 - 8) (5 + 8)$

עכשיו נעשה פחות 36 כלומר פחות 6 (אבל בריבוע)

$8^2 = 64$, - 36 והנה ! $28 = (6 - 8) (6 + 8)$

עכשיו נעשה פחות 49 כלומר פחות 7 (אבל בריבוע)

$8^2 = 64$, - 49 והנה ! $15 = (7 - 8) (7 + 8)$

עכשיו נעשה פחות 64 כלומר פחות 8 (אבל בריבוע)

$8^2 = 64$, - 64 והנה ! $00 = (8 - 8) (8 + 8)$

למה הגענו? ל 8 תוצאות שונות. אם תרצו החל מ $64, 63, 60, 55, 48, 39, 28, 15$... ואם תרצו אין

להחשיב 64 ואז יש להחשיב 00 ונשאר בידינו 8 תוצאות שונות.

$$8^2 - 0^2 = 64$$

$$8^2 - 1^2 = 63$$

$$8^2 - 2^2 = 60$$

$$8^2 - 3^2 = 55$$

$$8^2 - 4^2 = 48$$

$$8^2 - 5^2 = 39$$

$$8^2 - 6^2 = 28$$

$$8^2 - 7^2 = 15$$

$$8^2 - 8^2 = 00$$

יוסילה : באמת זה משהו ... אני מאוד נהייתי מההסבר הזה.

בלחשב : אנו הכבדנו עליך, אולי?

מבחין : דווקא אני נהנה לגלות לכם ... ואם תרצו להרחיק לכת, אני מסכים.

יוסילה : עוד לא גמרנו עם זה?
 מבחין : איפה גמרנו... יש כאן עולם שלם.
 אנו הגענו ל 8 תוצאות האלו 00, 15, 28, 39, 48, 55, 60, 63, 64

$$\begin{aligned} 1 &= 63 - 64 \\ 3 &= 60 - 63 \\ 5 &= 55 - 60 \\ 7 &= 48 - 55 \\ 9 &= 39 - 48 \\ 11 &= 28 - 39 \\ 13 &= 15 - 28 \\ 15 &= 00 - 15 \end{aligned}$$

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 אלו ממש 8 תוצאות.

אני אספר לך במה עסקתי... פשטי את הריבוע לכפל. למשל: 24^2 יכולים להיראות גם 24×24 .
 ואז נתעוררה אצלי השאלה: 24 פעמיים יש כאן. אני אשמור על יחס זה. רק!
 רק אעביר 1 מפה לשם. 25×23 ... נו! מה יש לחפש כאן? ומה אקבל אם זה כך 26×22 ...
 מצאתי כי כל מה שיש בידי הם המספרים הזוגיים. $0 = 24 - 24$; $2 = 23 - 25$; $4 = 22 - 26$; ...
 ניסיתי לחפש ההבדל שבין המכפלות. $576 = 24 \times 24$. $575 = 23 \times 25$. $572 = 22 \times 26$.
 אכן גיליתי הבדלים בריבוע. $576 - 575 = 1 \leftarrow 1^2$; $576 - 572 = 4 \leftarrow 2^2$; $576 - 567 = 9 \leftarrow 3^2$.
 תסתכלו על הלוח הזה ועל שבא אחריו.

משמאל לימין

x^2	מרחק מ 24^2		x^2	מרחק מ 24^2		x^2	מרחק מ 24^2		x^2
16^2	$576 - 320 = 256$	$8 \times 40 = 03\ 20$	8^2	$576 - 512 = 64$	$16 \times 32 = 05\ 12$	0^2	$576 - 576 = 0$	$24 \times 24 = 05\ 76$	
17^2	$576 - 287 = 289$	$7 \times 41 = 02\ 87$	9^2	$576 - 495 = 81$	$15 \times 33 = 04\ 95$	1^2	$576 - 575 = 1$	$23 \times 25 = 05\ 75$	
18^2	$576 - 252 = 324$	$6 \times 42 = 02\ 52$	10^2	$576 - 476 = 100$	$14 \times 34 = 04\ 76$	2^2	$576 - 572 = 4$	$22 \times 26 = 05\ 72$	
19^2	$576 - 215 = 361$	$5 \times 43 = 02\ 15$	11^2	$576 - 455 = 121$	$13 \times 35 = 04\ 55$	3^2	$576 - 567 = 9$	$21 \times 27 = 05\ 67$	
20^2	$576 - 176 = 400$	$4 \times 44 = 01\ 76$	12^2	$576 - 432 = 144$	$12 \times 36 = 04\ 32$	4^2	$576 - 560 = 16$	$20 \times 28 = 05\ 60$	
21^2	$576 - 135 = 441$	$3 \times 45 = 01\ 35$	13^2	$576 - 407 = 169$	$11 \times 37 = 04\ 07$	5^2	$576 - 551 = 25$	$19 \times 29 = 05\ 51$	
22^2	$576 - 92 = 484$	$2 \times 46 = 00\ 92$	14^2	$576 - 380 = 196$	$10 \times 38 = 03\ 80$	6^2	$576 - 540 = 36$	$18 \times 30 = 05\ 40$	
23^2	$576 - 47 = 529$	$1 \times 47 = 00\ 47$	15^2	$576 - 351 = 225$	$9 \times 39 = 03\ 51$	7^2	$576 - 527 = 49$	$17 \times 31 = 05\ 27$	
24^2	$576 - 000 = 576$	$0 \times 48 = 00\ 00$							

25 פעולות כולל (24×24) וכולל (48×0)

שניהם בסך 48	ההבדל שבין שניהם	שניהם בסך 48	ההבדל שבין שניהם
$24 \times 24 =$	$24 - 24 = 0$	$12 \times 36 =$	$36 - 12 = 24$
$23 \times 25 =$	$25 - 23 = 2$	$11 \times 37 =$	$37 - 11 = 26$
$22 \times 26 =$	$26 - 22 = 4$	$10 \times 38 =$	$38 - 10 = 28$
$21 \times 27 =$	$27 - 21 = 6$	$9 \times 39 =$	$39 - 09 = 30$
$20 \times 28 =$	$28 - 20 = 8$	$8 \times 40 =$	$40 - 8 = 32$
$19 \times 29 =$	$29 - 19 = 10$	$7 \times 41 =$	$41 - 7 = 34$
$18 \times 30 =$	$30 - 18 = 12$	$6 \times 42 =$	$42 - 6 = 36$
$17 \times 31 =$	$31 - 17 = 14$	$5 \times 43 =$	$43 - 5 = 38$
$16 \times 32 =$	$32 - 16 = 16$	$4 \times 44 =$	$44 - 4 = 40$
$15 \times 33 =$	$33 - 15 = 18$	$3 \times 45 =$	$45 - 3 = 42$
$14 \times 34 =$	$34 - 14 = 20$	$2 \times 46 =$	$46 - 2 = 44$
$13 \times 35 =$	$35 - 13 = 22$	$1 \times 47 =$	$47 - 1 = 46$
		$0 \times 48 =$	$48 - 0 = 48$

אם יש לכם שאלות?

יוסילה : זה בדיוק מה שהסברת מקודם.

בלחשב : אנו רואים כאן, 24×24 כלומר 24×24 ולאחריו מגיע 23×25 ... וכן זה עולה וזה יורד עד 00×48 . הסברת לנו שהמרחק בין 24^2 לבין המספרים שלמטה ממנו הם $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ מבחין : וכעת רצוני שתתמקדו בשתי שורות אלו. אני אקח את אלו לדוגמה.

$16 \times 32 =$	05 12
$15 \times 33 =$	04 95

הבדלי המכפלות... $512 - 495 = 17$... המספר האי-זוגי 17.

$24 \times 24 =$	05 76		$16 \times 32 =$	05 12	15	$8 \times 40 =$	03 20	31
$23 \times 25 =$	05 75	1	$15 \times 33 =$	04 95	17	$7 \times 41 =$	02 87	33
$22 \times 26 =$	05 72	3	$14 \times 34 =$	04 76	19	$6 \times 42 =$	02 52	35
$21 \times 27 =$	05 67	5	$13 \times 35 =$	04 55	21	$5 \times 43 =$	02 15	37
$20 \times 28 =$	05 60	7	$12 \times 36 =$	04 32	23	$4 \times 44 =$	01 76	39
$19 \times 29 =$	05 51	9	$11 \times 37 =$	04 07	25	$3 \times 45 =$	01 35	41
$18 \times 30 =$	05 40	11	$10 \times 38 =$	03 80	27	$2 \times 46 =$	00 92	43
$17 \times 31 =$	05 27	13	$9 \times 39 =$	03 51	29	$1 \times 47 =$	00 47	45
						$0 \times 48 =$	00 00	47

האם לוח זה ברור?

יוסילה : לאן אתה רוצה להגיע?

מבחין : רוצה שאשאל אותך ושדע לענות לי.

יוסילה : איזו שאלה?

מבחין : שני מספרים בסך 48. שהמכפלה של הפעולה עולה על המכפלה הקודמת לה ב 19? מצא שתי השורות לאותן שתי מכפלות.

יוסילה : שוב אתה מפתיע אותי, איך אפשר לענות על כאלו שאלות?

מבחין : אל דאגה, נשנה השאלה. שני מספרים בסך 98. שהמכפלה שלהם עולה על המכפלה הקודמת להם ב 43? מצא שתי השורות לאותן שתי מכפלות.

בלחשב : אז מה חשבת יוסילה... כאן לא משחקים!

מבחין : אנו נגיע, לאט-לאט.

רמיזה : תגיד מבחין, מדוע אינך נותן להם רמז?

מבחין : בסדר, אתה צודק. הנה נתחיל מההתחלה...

בעקבות $24 \times 24 = 576$

$23 \times 25 =$	5 75
$22 \times 26 =$	5 72

ההבדל בין שתי המכפלות $575 - 572 = 3$

ובכן הרמז הוא האי-זוגי שווה חצי גדול וחצי קטן. 3 נראה $1 + 2$.

עם חיבור ועם חיסור אלו החצאים... אנו נגיע ל 24

$$24 = 1 - 25 \quad 24 = 1 + 23 \quad 575 = 25 \times 23$$

$$24 = 2 - 26 \quad 24 = 2 + 22 \quad 572 = 26 \times 22$$

בסופו של דבר $24 = 2 + 22 = 1 + 23$ וכמו כן $24 = 2 - 26 = 1 - 25$

אכן המסכנה של הרמז הזה, כי יש שייכות בין המכפיל או הנכפל ועם חצאי האי-זוגי.

יוסילה : לי לא כל כך בשליטה! הבנתי מה שאמרת מילה במילה... אך עדיין לא נפל האסימון.

מבחין : אל תתייאש... זה יותר פשוט ממה שאתה חושב.

תסתכל על אלו...

המדובר, בשני מספרים בסך 48.

(כלומר, חצי = 24)

$15 \times 33 =$	4 95	17
$14 \times 34 =$	4 76	19

נראה, איך הגענו ל 19 ... $19 = 476 - 495$

ואתה יודע כי אפשר לראות $19 = 9 + 10$

החצי הגדול (10) שייך לשורת המספר התחתון (הקטן), והחצי הקטן (9) שייך לשורת המספר העליון (הגדול).

ואז $24 = ? + 9$... $24 = ? + 10$

$15 = 9 - 24$ במילים אחרות $24 = 15 + 9$

$14 = 10 - 24$ במילים אחרות $24 = 14 + 10$

ובכן בעזרת 24 ו 19 הגעתי ל ... יש ל 14 ו 15 והם שני מכפילים (בשתי שורות).

$15 \times 33 =$	4 95	17	$17 = 9 + 8$	$24 - 9 = 15$
$14 \times 34 =$	4 76	19	$19 = 10 + 9$	$24 - 10 = 14$

ידוע כי שני הגורמים $48 =$

אכן עם 15 אני אקבל מכפיל שני: $33 = 24 + 9$

אכן עם 14 אני אקבל מכפיל שני: $34 = 24 + 10$

(או אם רוצים, 48 פחות $14 = 34$; 48 פחות $15 = 33$)

$15 \times 33 =$	4 95	17	$17 = 9 + 8$	$24 + 9 = 33$
$14 \times 34 =$	4 76	19	$19 = 10 + 9$	$24 + 10 = 34$

$15 \times 33 =$	4 95	17	$48 + 15 = 33$
$14 \times 34 =$	4 76	19	$48 + 14 = 34$

פעולה עליונה: $33 \times 15 = ?$

פעולה תחתונה: $34 \times 14 = ?$

ההבדל בין שתי פעולות אלו, אמור להיות 19 .

בלחשב: אני חוזר על מה שנאמר...

אתה נתת לנו רק המספר 19 שאמור להיראות $19 = 9 + 10$, במסגרת $24 + 24 = 48$.

יש לדעת כי בחיסור כל חצי (של 19) מ 24 אנו מקבלים שני מכפילים לשתי הפעולות.

$15 = 9 - 24$, $14 = 10 - 24$ אכן כבר יש לנו שתי פעולות להשלים.

$15 \times ? = ?$, $14 \times ? = ?$ והיות ושני הגורמים $48 =$ אכן ניתן להשלים

$15 \times 33 = ?$, $14 \times 34 = ?$ וכעת מובטח לנו כי ההבדל בין שתי המכפלות $19 =$

יוסילה: אני הבנתי, וגם יש לי להתחיל בגישה שונה!

מבחין: כן "עולמנו הגדול" היקר... אני שומע!

יוסילה: יכולים להגיע לשני המכפילים הגדולים קודם.

$19 = 9 + 10$, $33 = 24 + 9$, $34 = 24 + 10$

מבחין: עכשין אני מבין שאתה הבנת.

במילים אחרות... הגענו ל $19 = (15 \times 33) - (14 \times 34)$

בלחשב: בסופו של דבר, $495 = 33 \times 15$, $476 = 34 \times 14$

לבדוק ... $19 = 476 - 495$ זה נכון!

מבחין: כדאי להעיר כי אם נסתכל מקרוב יש מה להבחין!

$15 \times 33 =$	4 95	17
$14 \times 34 =$	4 76	19

$$33 - 15 = 18$$

18 אינו אלא פעמיים 9.

$$34 - 14 = 20$$

20 אינו אלא פעמיים 10.

בלחשב: לי נראה לצרף גישתו של יוסילה לגישתו של מבחין.

$$34 = 10 + 24, \quad 33 = 9 + 24 \dots 10 + 9 = 19$$

$$14 = 10 - 24, \quad 15 = 9 - 24 \dots 10 + 9 = 19$$

נמצאו שתי הפעולות

$15 \times 33 =$	4 95
$14 \times 34 =$	4 76

יוסילה: אם אני מבין! אמור להיות, ההסבר אודות 24 כפול 24, שני המכפילים בסך 48. אותו

הסבר חל על כל פעולות הכפל (48 או 49 הפעולות) שבהם שני המכפילים בסך 48.

מבחין: ולא עוד אלא ... חל על כל קבוצת מכפילים כאשר שניהם באותו סך. למשל אם סך שני

המכפילים $76 =$ (כלומר פעמיים 38). אנו נתחיל מ $38 \times 38 = 1444$ ונסיים ב $76 \times 0 = 0$.

ובאותו הלוח השייך ל 76 אנו נבחין ממש מה שאנו מבחינים בלוח של 48.

יוסילה: עכשיו שהבנתי, האם תרצה לבחון אותי?

מבחין: לבחון אותך, במה?

יוסילה: אתה שאלת אותי שאלה אודות 98! אתה זוכר!

מבחין: כן! אני זוכר... שני מספרים בסך 98. שהמכפלה שלהם עולה על המכפלה הקודמת להם

ב 43? מצא שתי השורות לאותן שתי מכפלות.

$$49 + 49 = 98; \quad 22 + 21 = 43$$

בלחשב: אני מסכים כי זהו הצעד הנכון להתחיל!

יוסילה: אני אלק בשיטה (במסכנה) של בלחשב!

$$71 = 22 + 49, \quad 70 = 21 + 49 \dots 22 + 21 = 43$$

$$27 = 22 - 49, \quad 28 = 21 - 49 \dots 22 + 21 = 43$$

$28 \times 70 =$	1960	
$27 \times 71 =$	1917	43

מבחין: עבודה טובה... ממש נהנים להבחין איך התקדמת!

ובכן אני אתן לכם רמז לשלב הבא.

יוסילה: מה! יש עוד שלב?

בלחשב: יוסילה חבוב, מבחין הולך עד הסוף הפולחן שלו.

מבחין: להתחשב כי ההבדל בין שתי הפעולות הוא תמיד מספר אי-זוגי. הבא וניגש ישר לעניין.

שני מספרים בסך 48. שהמכפלה של הפעולה עולה על המכפלה הקודמת לה ב 39! מצא שתי

השורות לאותן שתי מכפלות.

בלחשב: כעת זה צריך להיות יותר קל.

$$20 + 19 = 39 \text{ שאמור להיות נראה}$$

יש לדעת כי בחיסור וחיבור 19 עם 24 אנו מקבלים פעולה עליונה.

וכן בחיסור וחיבור 20 עם 24 אנו מקבלים פעולה עליונה.

$$43 = 19 + 24; \quad 5 = 19 - 24 \dots \text{פעולה עליונה} = 43 \times 5 = ??$$

$$44 = 20 + 24; \quad 4 = 20 - 24 \dots \text{פעולה עליונה} = 44 \times 4 = ??$$

וכמובן כי ההבדל בין שתי המכפלות, אמור להיות 39.

מבחין: עד כאן, ההתקדמות נמצאת ב 100%.

יוסילה: מה שנכון, נכון!

$5 \times 43 =$	2 15	37
$4 \times 44 =$	1 76	39

ואפשר להגיע כך (החצי הקטון בפעולה) : $43 = 19 + 24$, $5 = 19 - 24$:
וכן לשורה שאחריה (החצי הגדול בפעולה) : $44 = 20 + 24$, $4 = 20 - 24$:
מבחין : וכעת מי משניכם מבחין יותר?
ומבלי לעשות $39 = 176 - 215$... אני רוצה למצוא 39

$5 \times 43 =$
$4 \times 44 =$

מי מכם רואה כאן איזה 39?
אני רואה שני 39 בין השורות.
יוסילה : כן! אני אשמח להבחין במה שאתה מבחין.
מבחין : הנה !

$5 \times 43 =$
$4 \times 44 =$

$39 = 5 - 44$ ו $39 = 43 - 4$ מסכימים איתי?
כלומר אני לא צריך לחשב ולהגיע ל 215 ול 176 ולעשות חיסור, אם כבר יש לי

$5 \times 43 =$
$4 \times 44 =$

בלחשב : עבודה טובה ומעניינת!
יוסילה : אם כן יש לנו 3 שיטות!
בלחשב : איזה שלוש שיטות?
יוסילה :
שיטה-1 :

$5 = 19 - 24$; $43 = 19 + 24$... פעולה עליונה $?? = 43 * 5 =$
 $4 = 20 - 24$; $44 = 20 + 24$... פעולה עליונה $?? = 44 * 4 =$
שיטה-2 :

$5 = 19 - 24$; $43 = 5 - 48$... פעולה עליונה $?? = 43 * 5 =$
 $4 = 20 - 24$; $44 = 4 - 48$... פעולה עליונה $?? = 44 * 4 =$
שיטה-3 :

$5 = 19 - 24$; $43 = 4 + 39$... פעולה עליונה $?? = 43 * 5 =$
 $4 = 20 - 24$; $44 = 5 + 39$... פעולה עליונה $?? = 44 * 4 =$
מבחין : זו! עבודה טובה!

האם מוכנים להמשיך הלאה...
יוסילה : עוד!!!
מבחין : להזכיר לכם

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2

השורה העליונה המספרים האי-זוגיים, והשורה התחתונה המספרים בריבוע.

הידעתם כי $9 + 10 = 19$ אך $9^2 - 10^2 = 19 = 81 - 100$
האם ידוע לכם שייכות בין 19 וחבריו האי-זוגיים, למספרים בריבוע?

24 x 24 =	05 76	0		+	
23 x 25 =	05 75	1	0 + 1 = 1	1 ²	בזמן שאני מסתכל על 19
22 x 26 =	05 72	3	1 + 3 = 4	2 ²	אני רואה החצי הגדול 10
21 x 27 =	05 67	5	4 + 5 = 9	3 ²	אלא שנראה לי 10 ²
20 x 28 =	05 60	7	9 + 7 = 16	4 ²	מה זה בדיוק ה 10 ² הזה ?
19 x 29 =	05 51	9	16 + 9 = 25	5 ²	1+3+5+7+9+11+13+15+17+19
18 x 30 =	05 40	11	25 + 11 = 36	6 ²	10 ² =
17 x 31 =	05 27	13	36 + 13 = 49	7 ²	פחות
16 x 32 =	05 12	15	49 + 15 = 64	8 ²	1+3+5+7+9+11+13+15+17
15 x 33 =	04 95	17	64 + 17 = 81	9 ²	9 ² =
14 x 34 =	04 76	19	81 + 19 = 100	10 ²	ומובן מאליו כי 10 ² פחות 9 ² = 19
13 x 35 =	04 55	21	100 + 21 = 121	11 ²	(9 + 10 = 9 ² - 10 ²)
12 x 36 =	04 32	23	121 + 23 = 144	12 ²	הידעת כי
11 x 37 =	04 07	25	144 + 25 = 169	13 ²	10 ² = 19 + 9 ²
10 x 38 =	03 80	27	169 + 27 = 196	14 ²	המספר האי-זוגי + חציו הקטן בריבוע
9 x 39 =	03 51	29	196 + 29 = 225	15 ²	= חציו הגדול בריבוע.
8 x 40 =	03 20	31	225 + 31 = 256	16 ²	

האין זה הרחקת לכת כמו שצריך?

יוסילה : רגע! אם כן 39 יש לראות בו החצי הגדול 20 $\leftarrow 20^2$

כלומר כל המספרים האי-זוגיים עד השורה של 39 הם 20² (400 = 39+.....7+5+3+1)

מבחין : נכון! אתה חושב נכון. וכעת האם תרצה לעמוד במבחן, שוב?

יוסילה : למה לא?

מבחין : הנה ! סך שני המכפילים = 58 כלומר מתחילים ב 29 x 29 ומסימים ב 58 x 00.

"נתון לך" המספר האי-זוגי = 7 תמצא שתי הפעולות ! ותוסיף לנו הפרטים שנתחדשו!

יוסילה : 7 נראה 4 + 3 הקטן לגדול, והגדול לקטן. [29 + 29 = 58]

הגדול 26 x 32 ... 32 = 3 + 29, 26 = 3 - 29

הקטן 25 x 33 ... 33 = 4 + 29, 25 = 4 - 29

אנו כבר רואים את ה 7 ... 32 פחות 25 = 7, 33 פחות 26 = 7

832 = 26 x 32, 825 = 25 x 33 בסופו של דבר : 825 - 832 = 7

ולתוספת : 4² = 7 + 5 + 3 + 1 (4 הוא החצי הגדול ל 7)

בלחשב : אני מתגאה בחבר שלי... הוא תפס יותר טוב ממני...

מבחין : הערה ... מובן מאליו אלא לוודא, איך להסתכל בלוח הזה.

24 x 24	0	0 + 24 = 24	16 x 32	15	15 + 16 = 31	8 x 40	31	31 + 8 = 39
23 x 25	1	1 + 23 = 24	15 x 33	17	17 + 15 = 32	7 x 41	33	33 + 7 = 40
22 x 26	3	3 + 22 = 25	14 x 34	19	19 + 14 = 33	6 x 42	35	35 + 6 = 41
21 x 27	5	5 + 21 = 26	13 x 35	21	21 + 13 = 34	5 x 43	37	37 + 5 = 42
20 x 28	7	7 + 20 = 27	12 x 36	23	23 + 12 = 35	4 x 44	39	39 + 4 = 43
19 x 29	9	9 + 19 = 28	11 x 37	25	25 + 11 = 36	3 x 45	41	41 + 3 = 44
18 x 30	11	11 + 18 = 29	10 x 38	27	27 + 10 = 37	2 x 46	43	43 + 2 = 45
17 x 31	13	13 + 17 = 30	9 x 39	29	29 + 9 = 38	1 x 47	45	45 + 1 = 46
						0 x 48	47	47 + 0 = 47

אם יכולים לומר 33 - 14 = 19 יכולים גם לומר 33 = 19 + 14

ואני אלך רחוק יותר... לא צריך להיעזר בשתי השורות. אפשר בשורה אחת על ידי "פחות 1"

איך? 14 x 34 איפה אתה רואה כאן 19? רק אם עושים "פחות 1"

34 פחות 14 פחות 1 = 19 נכון?

וכן אפשר למצוא ה 34 אם יש לך 14 ו 19 ... ב + 1 . איך? $34 = 14 + 19 + 1$

וכן אפשר למצוא ה 14 אם יש לך 34 ו 19 ... ב - 1 . איך? $14 = 1 - 19 - 34$

במילים אחרות אני מסתכל בזה 34×14 ורואה את זה $34 - 14 - 1 = 19$

שהוא 19 ההבדל בין המכפלה של 34×14 לבין המכפלה של 33×15 הגדולה ממנה.

בלחשב: סוף-סוף, אמרת לנו כל מה שיש להגיד בעניין...

יוסילה: אכן זה היה הפולחן הקודם שעסקת בו? אני רואה שעוד נשארו ניירות בתיק שלא

הראתה לנו, תראה לי, מה זה הדף הזה?

מבחין: הנה...

$$1^2 = 0^2 + 1 \times 01$$

$$2^2 = 1^2 + 1 \times 03 = 0^2 + 2 \times 02$$

$$3^2 = 2^2 + 1 \times 05 = 1^2 + 2 \times 04 = 0^2 + 3 \times 03$$

$$4^2 = 3^2 + 1 \times 07 = 2^2 + 2 \times 06 = 1^2 + 3 \times 05 = 0^2 + 4 \times 04$$

$$5^2 = 4^2 + 1 \times 09 = 3^2 + 2 \times 08 = 2^2 + 3 \times 07 = 1^2 + 4 \times 06 = 0^2 + 5 \times 05$$

$$6^2 = 5^2 + 1 \times 11 = 4^2 + 2 \times 10 = 3^2 + 3 \times 09 = 2^2 + 4 \times 08 = 1^2 + 5 \times 07 = 0^2 + 6 \times 06$$

$$7^2 = 6^2 + 1 \times 13 = 5^2 + 2 \times 12 = 4^2 + 3 \times 11 = 3^2 + 4 \times 10 = 2^2 + 5 \times 09 = 1^2 + 6 \times 08 = 0^2 + 7 \times 07$$

$$8^2 = 7^2 + 1 \times 15 = 6^2 + 2 \times 14 = 5^2 + 3 \times 13 = 4^2 + 4 \times 12 = 3^2 + 5 \times 11 = 2^2 + 6 \times 10 = 1^2 + 7 \times 09 = 0^2 + 8 \times 08$$

$$9^2 = 8^2 + 1 \times 17 = 7^2 + 2 \times 16 = 6^2 + 3 \times 15 = 5^2 + 4 \times 14 = 4^2 + 5 \times 13 = 3^2 + 6 \times 12 = 2^2 + 7 \times 11 = 1^2 + 8 \times 10 = 0^2 + 9 \times 09$$

הבלעדיות שתמצא בלוח זה, מתבטאה בדוגמה של 8^2 .

$$8^2 = 8^2 + 0 \times 16$$

$$8^2 = 3^2 + 5 \times 11$$

$$8^2 = 7^2 + 1 \times 15$$

$$8^2 = 2^2 + 6 \times 10$$

$$8^2 = 6^2 + 2 \times 14$$

$$8^2 = 1^2 + 7 \times 09$$

$$8^2 = 5^2 + 3 \times 13$$

$$8^2 = 0^2 + 8 \times 08$$

$$8^2 = 4^2 + 4 \times 12$$

ל 8^2 יש 8 או 9 פעולות.

הסך $\rightarrow$: $1 + 15 = 2 + 14 = 3 + 13 = 4 + 12 = 5 + 11 = 6 + 10 = 7 + 9 = 8 + 8 = 2 \times 8$

שבפרטים אלו, אנו רואים הסך של הגורמים = 16 אכן צרפתי עניין זה לכאן.

$$8^2 = 7^2 + 1 \times 15 = 6^2 + 2 \times 14 = 5^2 + 3 \times 13 = 4^2 + 4 \times 12 = 3^2 + 5 \times 11 = 2^2 + 6 \times 10 = 1^2 + 7 \times 09 = 0^2 + 8 \times 08$$

$8^2 = 7^2 + 1 \times 15$	$8^2 = 3^2 + 5 \times 11$	$8^2 = 7^2 + 1 \times 15$	$8^2 = 3^2 + 5 \times 11$
$8^2 = 6^2 + 2 \times 14$	$8^2 = 2^2 + 6 \times 10$	$8^2 = 6^2 + 2 \times 14$	$8^2 = 2^2 + 6 \times 10$
$8^2 = 5^2 + 3 \times 13$	$8^2 = 1^2 + 7 \times 09$	$8^2 = 5^2 + 3 \times 13$	$8^2 = 1^2 + 7 \times 09$
$8^2 = 4^2 + 4 \times 12$	$8^2 = 0^2 + 8 \times 08$	$8^2 = 4^2 + 4 \times 12$	$8^2 = 0^2 + 8 \times 08$
$7 + 1 = 6 + 2 = 8$	$3 + 5 = 2 + 6 = 8$	$15 - 7 = 14 - 6 = 8$	$11 - 3 = 10 - 2 = 8$
$5 + 3 = 4 + 4 = 8$	$1 + 7 = 0 + 8 = 8$	$13 - 5 = 12 - 4 = 8$	$09 - 1 = 08 - 0 = 8$
גורם מהכפל + המספר שבריבוע = 8	גורם מהכפל + המספר שבריבוע = 8	גורם מהכפל - המספר שבריבוע = 8	גורם מהכפל - המספר שבריבוע = 8

המספר שבריבוע, הכוונה, על המספר הפשוט, בהיותו בריבוע.

$$8^2 = 3^2 + 5 \times 11$$

גורם מהכפל

+ המספר שבריבוע = 8

כלומר, $3 + 5$ פשוט, ולא $3^2 = 8$

$8^2 = 7^2 + 1 \times 15$	$8^2 = 3^2 + 5 \times 11$
$8^2 = 6^2 + 2 \times 14$	$8^2 = 2^2 + 6 \times 10$
$8^2 = 5^2 + 3 \times 13$	$8^2 = 1^2 + 7 \times 09$
$8^2 = 4^2 + 4 \times 12$	$8^2 = 0^2 + 8 \times 08$
$1 + 15 = 2 + 14 = 16$ $3 + 13 = 4 + 12 = 16$	$5 + 11 = 6 + 10 = 16$ $7 + 09 = 8 + 08 = 16$
וכאן אנו רואים את הפעמיים 8.	

עוד יש כאן מה להבחין

האם צריכים הסברים?

יוסילה: באמת לא צריך. רק יש לקחת כמה דקות לעיין ולראות מקרוב מה יש כאן. לאחר רגעים אחדים, פונה מבחין לחברים.

מבחין: רק נסתכל על מה שראינו, אפשר נוכל להבחין דבר שלא גילינו עדיין.

יוסילה: מה בדיוק ראינו עד עכשיו?

בלחשב: כמה שידוע לי דיברנו על $10 + 9 = 19$; והגענו לזה $9^2 - 10^2 = 19$;

וכן $19 = 9^2 - 10^2 = (14 \times 34) - (15 \times 33)$

וכן $19 = 14 - 33 = 15 - 34$

וכן $(17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1) - (19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1)$

מבחין: סוף סוף, הנה הלוח שהתעסקנו בו.

$24 \times 24 =$	05 76	0	+	$12 \times 36 =$	04 32	23	12^2
$23 \times 25 =$	05 75	1	1^2	$11 \times 37 =$	04 07	25	13^2
$22 \times 26 =$	05 72	3	2^2	$10 \times 38 =$	03 80	27	14^2
$21 \times 27 =$	05 67	5	3^2	$9 \times 39 =$	03 51	29	15^2
$20 \times 28 =$	05 60	7	4^2	$8 \times 40 =$	03 20	31	16^2
$19 \times 29 =$	05 51	9	5^2	$7 \times 41 =$	02 87	33	17^2
$18 \times 30 =$	05 40	11	6^2	$6 \times 42 =$	02 52	35	18^2
$17 \times 31 =$	05 27	13	7^2	$5 \times 43 =$	02 15	37	19^2
$16 \times 32 =$	05 12	15	8^2	$4 \times 44 =$	01 76	39	20^2
$15 \times 33 =$	04 95	17	9^2	$3 \times 45 =$	01 35	41	21^2
$14 \times 34 =$	04 76	19	10^2	$2 \times 46 =$	00 92	43	22^2
$13 \times 35 =$	04 55	21	11^2	$1 \times 47 =$	00 47	45	23^2
				$0 \times 48 =$	00 00	47	24^2

האם אתם זוכרים איך מצאנו 10^2 ?

...	...	...	...
$18 \times 30 =$	05 40	11	6^2
$17 \times 31 =$	05 27	13	7^2
$16 \times 32 =$	05 12	15	8^2
$15 \times 33 =$	04 95	17	9^2
$14 \times 34 =$	04 76	19	10^2

$19 = 10 + 9$ אנו הסתפקנו בחצי הגדול של המספר האי-זוגי

אך יש לגלות שזו "שיטה" למצוא סך האי-זוגיים החל מ 1 ועד האי-זוגי האחרון:

$$10^2 = 19 + 17 + \dots + 5 + 3 + 1$$

ולא לשכוח כי

$$19 = 9^2 - 10^2 \quad (\text{שהם עצמם שני החצאים. } 9 + 10 = 19)$$

$$19 = 9 + 10, \quad 19 = 9^2 - 10^2$$

$$19 = 9^2 - 10^2 = (14 \times 34) - (15 \times 33)$$

יוצא לנו הלוח הזה

495 - 476 = 100 - 81 = 19			
היינו			
15x33 - 14x34 = 10x10 - 9x9 = 19			
15 x 33 =	04 95	17	9 ²
14 x 34 =	04 76	19	10 ²

במילים אחרות: אם הגיע לידי אך ורק 10 ו 24, אני יכול לפעולה השייכת לאותה שורה. בלחשב: כאן זה כולל מה שראינו אך טוב לראות הדבר מזייות שונות. מבחין: אני חוזר לכם על פרט שלא התעכבנו מספיק עליו.

24 x 24 =	05 76	0	+	12 x 36 =	04 32	23	12 ²
23 x 25 =	05 75	1	1 ²	11 x 37 =	04 07	25	13 ²
22 x 26 =	05 72	3	2 ²	10 x 38 =	03 80	27	14 ²
21 x 27 =	05 67	5	3 ²	9 x 39 =	03 51	29	15 ²
20 x 28 =	05 60	7	4 ²	8 x 40 =	03 20	31	16 ²
19 x 29 =	05 51	9	5 ²	7 x 41 =	02 87	33	17 ²
18 x 30 =	05 40	11	6 ²	6 x 42 =	02 52	35	18 ²
17 x 31 =	05 27	13	7 ²	5 x 43 =	02 15	37	19 ²
16 x 32 =	05 12	15	8 ²	4 x 44 =	01 76	39	20 ²
15 x 33 =	04 95	17	9 ²	3 x 45 =	01 35	41	21 ²
14 x 34 =	04 76	19	10 ²	2 x 46 =	00 92	43	22 ²
13 x 35 =	04 55	21	11 ²	1 x 47 =	00 47	45	23 ²
				0 x 48 =	00 00	47	24 ²

22 + 2 השני ל 2² = 24 וכן כולם. המספר שברביבוע (כפשוטו) + המכפיל הקטן = 24
 27 - 3 השני ל 3² = 24 וכן כולם. המכפיל הגדול - המספר שברביבוע (כפשוטו) = 24
 הדגש כאן על מציאת המספר שברביבוע בדרך זו. עבור ... 22 x 26 = ? או 21 x 27 = ?
 22 - 24 = 2 היינו 2² וכן 21 - 24 = 3 היינו 3²
 26 - 24 = 2 היינו 2² וכן 27 - 24 = 3 היינו 3²
 יוסילה: הגם שכבר ראינו את זה, אך שוב נראה לי כחדש.

12 x 36 =	04 32	23	12 ²
11 x 37 =	04 07	25	13 ²
10 x 38 =	03 80	27	14 ²
9 x 39 =	03 51	29	15 ²
8 x 40 =	03 20	31	16 ²

להגיע ל 14 אפשר לעשות 24 פחות 10 או 38 פחות 24. עניין חדש, יש כאן!
 מבחין: כעת די לי לתת לכם פעולה כזו "38 x 10 = ?"
 ותכף תוכלו להגיע ל 38 - 24 = 14 או 14 - 10 = 14 ואז יש לנו 14² ממש כמו שיוסלה הבין.
 14², ובזה ה 14 שאמור להיות חצי גדול אנו מגיעים ל 27 = 14 + 13.

כלומר החל מ $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 27$ סך כל אלו $14^2 =$
 וכמובן אם תרצו להגיע ל 27 בדרך אחרת, הגישה תהיה די פשוטה: $27 = 1 - 10 - 38$
 בלחשב: אני אומר כמו יוסילה. הגם שכבר ראינו את זה, אך שוב נראה לי כחדש.
 מבחין: ועכשיו אני נותן תרגיל.

שני מספרים בסך 48 . אי שם הבדלי האי-זוגיים $= 18^2$.

מצא אותם שתי שורות שאחת מהן כוללת 18^2 .

בלחשב: 18 הוא חצי למספר אי-זוגי ...

יוסילה: 18 הוא החצי הזוגי, כלומר הוא החצי הגדול. (ומובן כי איתו יש 17)

בלחשב: נמצא המספר האי-זוגי $= 35$ שהוא שווה $18 + 17$

יוסילה: אני מסכים! ובכן איך אנו נמשיך הלאה?

מבחין: עד כעשיו היגענו ל $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$ עד $35 = 18^2$ (מזה שעשינו $18 + 17 = 35$)

בלחשב: $18 + 24 = 42$ וגם $18 - 24 = 6$

נראה כי $\dots 6 \times 42$ היא הפעולה האחרונה.

יוסילה: אפשר לבדוק $\dots 42 - 6 = 36$ שהוא $18 + 18 = 36$

בלחשב: ועכשיו יש למצוא הפעולה הנעזרת בחצי השני של ה 35 , כלומר ה 17 .

יוסילה: יש מספר דרכים... אך אנו ניעזר ב 17 (בהתחשב $17 + 16 = 33$)

$17 + 24 = 41$ וגם $17 - 24 = 7$

נראה כי $\dots 7 \times 41$ היא הפעולה הקודמת.

בלחשב: אפשר לבדוק $\dots 41 - 7 = 34$ שהוא $17 + 17 = 34$

$8 \times 40 =$	03 20	31	16^2
$7 \times 41 =$	02 87	33	17^2
$6 \times 42 =$	02 52	35	18^2
$5 \times 43 =$	02 15	37	19^2

33 הוא המספר האי-זוגי הקודם ל 35 . כמו 17^2 הקודם ל 18^2 .

יוסילה: כמובן כי לאחר שהגענו ל 6×42 יכולנו להקטין הגדול ולהגדיל הקטן לעלות לשורה

הקודמת. $\downarrow 42 \times 6 \uparrow$ כלומר 41×7 .

יוסילה: אני כבר מבחין! מבחין בדיוק מסויים.

$24 \times 24 =$	05 76	0	+		
$23 \times 25 =$	05 75	1	1^2		
$22 \times 26 =$	05 72	3	2^2		
$21 \times 27 =$	05 67	5	3^2		
$20 \times 28 =$	05 60	7	4^2		
$19 \times 29 =$	05 51	9	5^2	$\uparrow$	
$18 \times 30 =$	05 40	11	6^2	$\uparrow$	
$17 \times 31 =$	05 27	13	7^2	$\uparrow$	
$16 \times 32 =$	05 12	15	8^2	$\uparrow$	
$15 \times 33 =$	04 95	17	9^2	$\uparrow$	
$14 \times 34 =$	04 76	19	10^2		$10 \div 2 = 5$
$13 \times 35 =$	04 55	21	11^2		

ל 9 עולים 4 מספ'.
 עולים 5 מספרים

כלומר, לזוגי עולים בחצי למצוא המשלים (ל 19)

ולאי זוגי, עולים בחצי קטן למצוא אותו בעינו (החצי האי-זוג ב 17).

מבחין: נכון מאוד! אני בחנתי אותו דיוק במספר מקרים, והכל מתאים.

יוסילה: סוף סוף, יוסילה עובד טוב אצלך, מבחין!

מבחין : אני ממש נהנה הנאה מיוחדת שאיני מדבר באויר. אני רואה שאתם הבנתם כל מילה שאמרתי. אכן כמו שאמר בלחשב, אותם דברים הנראים מזווית אחרת יש בכך עדיפות. והנה!

$8 \times 40 = ?$	31	16^2	$40 - 16^2 = 24$	$8 + 16^2 = 24$	$40 - 8 - 1 = 31$	$40 + 8 - 1 - 16 = 31$
$7 \times 41 = ?$	33	17^2	$41 - 17^2 = 24$	$7 + 17^2 = 24$	$41 - 7 - 1 = 33$	$41 + 7 - 1 - 17 = 33$
$6 \times 42 = ?$	35	18^2	$42 - 18^2 = 24$	$6 + 18^2 = 24$	$42 - 6 - 1 = 35$	$42 + 6 - 1 - 18 = 35$
$5 \times 43 = ?$	37	19^2	$43 - 19^2 = 24$	$5 + 19^2 = 24$	$43 - 5 - 1 = 37$	$43 + 5 - 1 - 19 = 37$
$4 \times 44 = ?$	39	20^2	$44 - 20^2 = 24$	$4 + 20^2 = 24$	$44 - 4 - 1 = 39$	$44 + 4 - 1 - 20 = 39$

וארצה באותה הזדמנות להזכיר

$8 \times 40 =$	03 20	31	16^2	$15 + 16 = 31$
$7 \times 41 =$	02 87	33	17^2	$16 + 17 = 33$
$6 \times 42 =$	02 52	35	18^2	$17 + 18 = 35$
$5 \times 43 =$	02 15	37	19^2	$18 + 19 = 37$

יוסילה : האם אתה יודע מבחין כי אתה גאון קטן. הגם שרוח העיירה שלכם להיות פולחן לכל אחד מתושביה. אך יש פולחן ויש פולחן. הפולחן שלך משהו מרשים. מבחין : בעקבות מחמאות אלו אני אגלה לך לוח שעשיתי וקראתי לו לוח האי-זוגיים. והוא דומה ללוח של פסקל, אבל אני מרשה לך לקרוא לו "הלוח של מבחין".

#	C_0	C_1	C_2
L_0	2	1	
L_1	2	3	1
L_2	2	5	4
L_3	2	7	9
L_4	2	9	16
L_5	2	11	25
L_6	2	13	36

כאן אתה יכול למצוא סך האי-זוגיים. כמו $25 = 9 + 7 + 5 + 3 + 1$.

שים לב בעמודה-2 למטה, שם אפשר למצוא הריבוע 25 ...

עוד אודות מבנה הלוח הזה, אם תשים לב, העמודה-2 שכל כולה מספרים בריבוע. אך כל תא

בעמודה זו, מותאם לשורה שלו. למשל " L_4 " שורה-4, שייך אליה $16 = 4^2$.

כמובן, כי כל תא בעמודה-0 בצירוף תא בעמודה-1 = הסך נמצא בשורה הבאה בעמודה-1.

למשל: בשורה-5 $13 = 11 + 2$... הנמצא בעמודה-2 בשורה למטה. ממש כמו הלוח של פסקל.

#	C_0	C_1	C_2	=
L_0	2	1		
L_1	2	3	1	1^2
L_2	2	5	4	2^2
L_3	2	7	9	3^2
L_4	2	9	16	4^2
L_5	2	11	25	5^2
L_6	2	13	36	6^2

באותו לוח אתה יכול לגלות סך המספרים האי-זוגיים.
 $25 = 9 + 7 + 5 + 3 + 1$ הגם כי למדנו לחשב (אי-זוגי עד 9) $5 + 4 = 9$ בוחרים ב $5^2 \dots 5$
 את זה יכולים לראות על הלוח ...
 לזכור כי 25 הוא גם הסך של $16 + 9$
 בקיצור, שיטה למציאת סך אי-זוגי, דרך חשבון! די בחצי הגדול בריבוע.
 $5 = 4 + 1$ מזה מגיעים ל 5^2 בדרך מילולית: מ 1 ועד 9, סך האי-זוגיים $= 5^2$.
 כמובן זה הלוח שייך למה שאני עוסק בו כעת וכבר הראתי לכם אותו.

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗	↓↗
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2

ואני גם מכניס שיכלולים בלוח שלי... אתם יכולים להיווכח. המספרים האי-זוגיים, בריבוע.
 כמה רחוק התא 81 שבעמודה-2 (שורה-9) מהתא 9^2 שבעמודה-1?
 משורה-4 לשורה-9 יש 5 שורות (החצי הגדול של 9).

#	C_0	C_1	C_2	
L_0	2	1^2		
L_1	2	3^2	1	
L_2	2	5^2	4	
L_3	2	7^2	9	
L_4	2	9^2	16	0
L_5	2	11^2	25	↓1
L_6	2	13^2	36	↓2
L_7	2	15^2	49	↓3
L_8	2	17^2	64	↓4
L_9	2	19^2	81	5 ←

אם רוצים פרשנות שונה. לדלג החצי הקטון (4 משבצות) ותגיע לחצי הגדול (המשבצת החמישית)
 ותמצא 81. כי החצי הגדול, שווה למספר התאים שיש לרדת.

#	C_0	C_1	C_2	
L_0	2	1^2		
L_1	2	3^2	1	
L_2	2	5^2	4	0
L_3	2	7^2	9	↓1
L_4	2	9^2	16	↓2
L_5	2	11^2	25	3 ←

$$5 = 2 + 3$$

וגם יכולים להסיק מסכנה ממה שיש בלוח זה

#	C ₀	C ₁	C ₂	
L ₆	2	13	36	6 ²
L ₇	2	15	49	7 ²
L ₈	2	17	64	8 ²
L ₉	2	19	81	9 ²

הידעתם כי הבדל בין $17 = 8^2 - 9^2$ שהוא שווה $17 = 8 + 9$ המסכנה, הבדל הריבועים למספרים העוקבים (הבאים בזה אחר זה) = סך שני המספרים עצמם. בלחשב: הסיבה לכך, כי כל ריבוע = כפל. $17 = 1 \times 17 = (8 - 9)(8 + 9) = 8^2 - 9^2$ אך לא התעכב על הדיוק, לומר כי יוסילה: הנה בלחשב גילה המקור! $17 = (8 + 9) = (8 - 9)(8 + 9) = 8^2 - 9^2$ מבחין: אני רואה שאתם ממהרים לחזור הביתה, אךן לסיום נסכם.

8 x 40 =	03 20	31	16 ²	256
7 x 41 =	02 87	33	17 ²	289
6 x 42 =	02 52	35	18 ²	324
5 x 43 =	02 15	37	19 ²	361

$$35 = 252 - 287 ; 35 = (42 \times 6) - (41 \times 7)$$

$$35 = 17 + 18 ; 35 = 289 - 324 ; 35 = 17^2 - 18^2$$

$$35 = 7 - 42 ; 35 = 6 - 41$$

ובזה נפרדו החברים ושבנו הביתה. וזה היה ביקורו הראשון של יוסילה אצל אחד מחברי בלחשב.