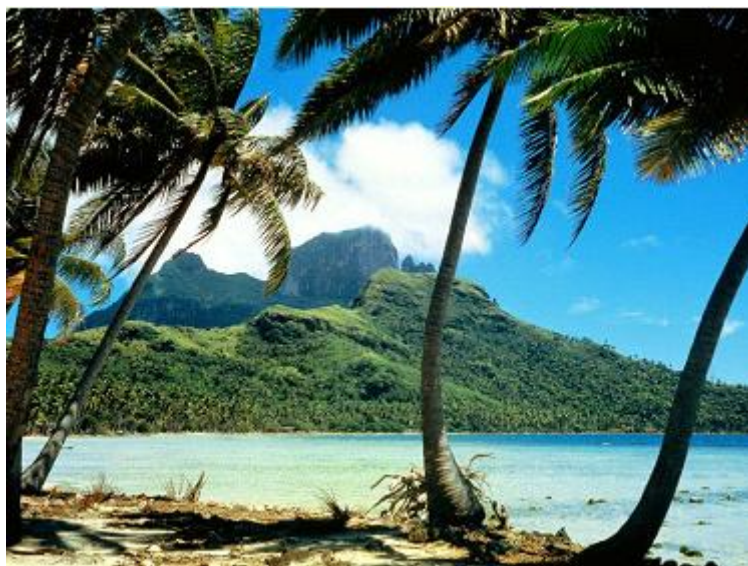


קוראים לו

יוסילה מתמטיקה.

ברוכים הבאים לעולם
"החשבון לא חשבון"

לפנינו ספור אודות נער שמצא עצמו על אי בודד. ובסופו של דבר
גילה כי בקצה האי ההיא קיימת איזה עיירה, אלא שאנשיה
קצת מוזרים.
ושם פגש במשפחה שאכסנה אותו להיות כאחד מהם.



אנו נהיה עדים לכל מה שעבר עליו בעיר ההיא.
ונראה מקרוב הפלאי-פלאים שבחשבון ללא חשבון
שנתגלו לו בחיותו ביניהם.



הקדמה אודות "החשבון ללא חשבון"

כשאומרים "חשבון ללא חשבון" אין הכוונה שאין כאן חשבון כלל, אלא המדובר אודות פעולת חשבון כה זעירה עד שילד קטן יכול לתת תשובה לפעולת חשבון כזו. ניקח למשל לוח הכפל של "99" ונראה ביחד כמה זמן ומאמצים אתה צריך להשקיע?

$$\text{למשל: } 4356 \div 99 = ?$$

בבקשה תיגש למהלכי ה"חשבון" שאתה מכיר ורגיל! ...
סיימת?

האתגר שבדף זה:

לחת לילד קטן לפתור לנו הפעולה " $4356 \div 99 = ?$ "

⬅ תוך שניה אחת, בבקשה!

וכעת, בא ונפתור אותו תרגיל "בחשבון ללא חשבון"

אני מסתכל על המספר "4356"

כן מסתכל כך! "4356"

וכל מה שיש לעשות הוא להוסיף "ועוד אחד"

אני חושב, כי אפילו ילד קטן יכול לפתור לנו תרגיל מסובך זה.

$$4356 \div 99 = 44$$

פרק ג'

היום מבקרים אצל החבר גידל!

דו שיח בין בלחשב ויוסילה.

בלחשב: אני כבר חשבתי אצל מי נבקר היום... הכי טוב לבקר אצל גידל, הוא מתעסק תמיד במספרים גדולים-ענקיים... נלך ונראה במה עוסק כעת?

יוסילה: טוב! בסדר! לדרך!

ויצאו שלושתם להגיע אצל גידל.

בלחשב: בוקר טוב גידל, באנו היום לראות במה אתה עוסק?

יוסילה: אני יוסילה, חבר חדש של בלחשב, ושמעתי שאתה עוסק תמיד במספרים ענקיים!

בלחשב: גידל! דע כי יוסילה הוא האורח שלנו, והוא מגיע מהעולם הגדול... ומתעניין לא פחות מאיתנו בכל מה שנוגע למספרים.

גידל: פלא! כמה שידוע לי כי בעולם הגדול יש להם משיכה לכל מה שהוא נוסחאות כלליות ובכלל הם לא מתעניינים להכיר לפני ולפנים בעולם המספרים... ממתי איכפת לעולם הגדול היאך המספרים מסתדרים ביניהם...

בלחשב: אכן יוסילה הוא מחבב מאוד דרכנו... וכל הזמן אני שומע אותו אומר "כמה חבל שאצלנו מאיפה שהגעתי, לא שייך למצוא כזה יידע!"

גידל: בסדר! יוסילה... בבקשה תמצא לי התוצאה לפעולה זו.

$$\begin{array}{r} 675081246^2 \\ - 324918754^2 \\ \hline \quad ? \quad ? \quad ? \quad ? \end{array}$$

רגע שכחתי להדגיש... אני לא נותן לך יותר מ 10 שניות...

בלחשב: אבל!

גידל: אם כן, 20 שניות. וכשתכירו מקרוב תראו שאני מבזבז הזמן שלכם, כי לא צריך כל כך זמן...

בלחשב: איך הגיעה לידך כזו פעולה?

גידל: לזו, יש כעין היסטוריה משלה?

פעם רציתי לבחון האפשרות למצוא המספר המשלים מבלי להיות מחסר מ 10, או מ 100...

ואכן הגעתי למסקנה כי יש אפשרות...

זה	1 0 0 0 0 0 0	יראה לנו	9 9 9 9 9 10
⇒	$\begin{array}{r} - 4 6 3 7 2 8 \\ \hline 5 3 6 2 7 2 \end{array}$	זה	$\begin{array}{r} - 4 6 3 7 2 8 \\ \hline \end{array}$
		⇒	

ובדרך זו יהיה לי עסק לכל ספרה בפני עצמה... וללא שארית... כך, בהבחנה זו אני יכול לפעול חופשי יותר, ואף אם ארצה להתחיל משמאל לימין, אין מעכב.

זה	1 0 0 0 0 0 0	יראה לנו	9 9 9 9 9 10
⇒	$\begin{array}{r} - 4 6 3 7 2 8 \\ \hline 5 3 6 2 7 2 \end{array}$	זה	$\begin{array}{r} - 4 6 3 7 2 8 \\ \hline 5 3 6 2 7 2 \end{array}$
		⇒	

כמובן, אותה תשובה... אך הטיפול הוא, בכל ספרה לעצמה!

אלא ש ... הייתי סקרן לדעת ההבדלים שבין המספרים המשלימים. כמו ש $10 = 7 + 3$ כן רציתי לראות איזו בלעדיות אפשר לגלות ב $4 = 3 - 7$? יוסילה : ומצאת איזו שהיא בלעדיות? גידל : כן. הנה היא... הריבועים שלהם. תסתכל בלוח זה משמאל לימין... הפשוט והריבוע!

$9 - 1 = 8$	$9^2 - 1^2 = ?$	$81 - 01 = 80$
$8 - 2 = 6$	$8^2 - 2^2 = ?$	$64 - 04 = 60$
$7 - 3 = 4$	$7^2 - 3^2 = ?$	$49 - 09 = 40$
$6 - 4 = 2$	$6^2 - 4^2 = ?$	$36 - 16 = 20$
$5 - 5 = 0$	$5^2 - 5^2 = ?$	$25 - 25 = 00$

הן כך

$9 - 1 = 8$	יכול להיראות →	$9^2 - 1^2 = 80$
$8 - 2 = 6$		$8^2 - 2^2 = 60$
$7 - 3 = 4$		$7^2 - 3^2 = 40$
$6 - 4 = 2$		$6^2 - 4^2 = 20$
$5 - 5 = 0$		$5^2 - 5^2 = 00$

והן כך

$9 - 1 = 8$	יכול להיראות →	$81 - 01 = 80$
$8 - 2 = 6$		$64 - 04 = 60$
$7 - 3 = 4$		$49 - 09 = 40$
$6 - 4 = 2$		$36 - 16 = 20$
$5 - 5 = 0$		$25 - 25 = 00$

ואז יצאתי להרפתקה ומה עם המשלימים ל 100 , ומה עם המשלימים ל 1000 , ומה עם המשלימים ל 10000 , עד שהגעתי למספר הענק. וכעת אם אשאל רמיזה כמה זה $2^2 - 8^2 = ?$ הוא ידע לעשות $8 - 2 = 6$ וכל מה שעליו לעשות הוא להוסיף 0 כלומר $2^2 - 8^2 = 60$ ואם אשאל בלחשב כמה זה $20^2 - 80^2 = ?$ הוא ידע לעשות $80 - 20 = 60$ וכל מה שעליו לעשות הוא להוסיף אפסים בהתאם, כלומר $20^2 - 80^2 = 6000$ ואם אשאל אותך יוסילה כמה זה $200^2 - 800^2 = ?$ אתה תדע לעשות $800 - 200 = 600$ וכל מה שעליך לעשות הוא להוסיף אפסים בהתאם, כלומר $200^2 - 800^2 = 600000$ אחר שדימיתי לעצמי אפשרויות מעין אלו עברתי לשלב אחר של הרפתקה... $47 = 53 - 100$ ובכן מה עם $47^2 - 53^2 = ?$ בפשוט אמור להיות $47 - 53 = 6$ אכן $47^2 - 53^2 = 600$ עוד צעד... $374 = 313 - 1000$ ומה עם $313^2 - 687^2 = ?$ בפשוט אמור להיות $313 - 687 = -374$ אכן $313^2 - 687^2 = -374000$. נמצא, כי די להיות עושים החיסור הפשוט. ואם המספרים הם של 3 ספרות, מוסיפים שלושה אפסים. ואם תשים לב לתרגיל שנתתי לך

$ \begin{array}{r} 675081246^2 \\ - 324918754^2 \\ \hline \quad \quad \quad ? \quad ? \quad ? \quad ? \end{array} $
--

תראה ממה מורכבים המספרים שלו

6	7	5	0	8	1	2	4	6	
+	3	2	4	9	1	8	7	5	4
9	9	9	9	9	9	9	9	9	10

כלומר 9 ספרות המשלימות עצמם. למעשה, זהו $1000000000 = 324918754 + 675081246$ וכל מה שיש לך לעשות הוא להוסיף 9 אפסים לפעולת החיסור לפעולה בריבוע!

675081246
- 324918754
350162492

חיסור רגיל

675081246^2
- 324918754^2
350162492 000000000

חיסור בריבוע, האם אתה מסכים איתי?

675081246^2
- 324918754^2
350162492 000000000

פעולת חיסור כדרכה, עם תוספת האפסים מימין.

בלחשב: זה היה מדהים, תודה רבה.

יוסילה: נודה לך...

גידל: רגע לפני שתצאו, רציתי להתייעץ אתכם על בעיה שאני נתקע בה...

בלחשב: כן, במה נוכל לעזור?

גידל: אני רציתי לעשות אותו תהליך בהיפוך... השקעתי כל כך זמן, ולא עלה בידי. רציתי למשל

להתחיל במספר כלשהו למשל, 7466 0000 וממנו להגיע לשני המספרים המשלימים עצמם.

האם אתם חושבים שיש סיכויים?

בלחשב: לפעמים ה"ללא חשבון" הקל, הוא כבד מנשוא, ודרכו ארוכה עד שמגיעים...

אך אין להתייאש.

יוסילה: אתה הרי גילית לנו כי

$9 - 1 = 8$	יכול להיראות →	$9^2 - 1^2 = 80$
$8 - 2 = 6$		$8^2 - 2^2 = 60$
$7 - 3 = 4$		$7^2 - 3^2 = 40$
$6 - 4 = 2$		$6^2 - 4^2 = 20$
$5 - 5 = 0$		$5^2 - 5^2 = 00$

בוא ונעשה תהליך אחורה, צעד אחר צעד.

$10 - 8 = 2$ וממנו $8 - 2 = 6$ וממנו $8^2 - 2^2 = 60$

עד כאן זה בהתאם לטבלה. נמשיך עוד צעד.

$100 = 88 - 12$ וממנו $76 = 12 - 88$ וממנו $7600 = 12^2 - 88^2$
מכאן אתה לומד כי ל 88 לא מקבלים כנגדו 22 אלא 12 הוא המשלים 100.

וכמו כן יש להתחשב שאני לא אקבל 66 אלא 76 ... $76 = 12 - 88$
נמשיך עוד צעד עד שנגיע להסקת הוראה והדרכה.

$1000 = 888 - 112$ וממנו $776 = 112 - 888$ וממנו $776000 = 112^2 - 888^2$
מכאן אתה לומד כי ל 888 לא מקבלים כנגדו 222 אלא 112 הוא המשלים 1000.

וכמו כן יש להתחשב שאני לא אקבל 666 אלא 776 ... $776 = 112 - 888$
בלחשב: אני חושב שאני יודע למה חותר יוסילה. כי כמו שעשינו טבלה המשלימה ל 10, נכון לעשות טבלה שנייה המשלימה ל 9.

אנו נסתכל בטבלה של 10 אך ורק עבור האחדות. מכאן ואילך, אנו נסתכל על הטבלה של 9.

לוח 10	לוח 9
$9 - 1 = 8$	$9 - 0 = 9$
$8 - 2 = 6$	$8 - 1 = 7$
$7 - 3 = 4$	$7 - 2 = 5$
$6 - 4 = 2$	$6 - 3 = 3$
$5 - 5 = 0$	$5 - 4 = 1$

וכעת אם אתה נותן לי 6 אני יודע שזה בא מ 8 פחות 2. ואם אתה נותן לי 3 אני יודע שזה בא מ 6 פחות 3. כלומר, עבור 76 נקבל באחדות (8 - 2) ונקבל בעשרות (6 - 3).

?	?
-	?
7	6

נתחיל לעבוד עם הטבלה העשר, אנו מגיעים ל 6 בעזרת $6 = 2 - 8$

?	8
-	?
7	6

נמשיך לעבוד עם טבלת התשע, אנו מגיעים ל 7 בעזרת $7 = 1 - 8$

8	8
-	?
1	2
7	6

הנה הגענו ל $76 = 12 - 88$

יוסילה: אני מבחין כאן בשתי רמות.

רמה א' כמו $? = 12 - 88$

רמה ב' כמו $? = 16 - 84$

אפשר כאן זה לא כל כך ברור... ניקח שלוש ספרות

רמה א' כמו $? = 124 - 876$ (להגיע לשני מספרים אלו, דרך תהליך זה $1000 = ? + 876$)

רמה ב' כמו $? = 152 - 848$ (להגיע לשני מספרים אלו, דרך תהליך זה $1000 = ? + 848$)

רמה ב' אין זה בטבלה 4 פחות 5.

אכן אנו נהיה מומחים ברמה א' לפי הטבלה עד שנצלח אף ללא הטבלה. וכשנזכה לרמה א' נחפש להבין רמה ב'.

גידל: אני מסכים... העיקר שאנו מתחילים לזוז בכיוון הנכון.

והנה לפנינו רמה-א

$$\begin{array}{r} 678655966 \\ - 321344034 \\ \hline 357311932 \end{array}$$

רמה א' ... הספרות של השורה העליונה גדולים מהספרות שבשורה השנייה.
ואם רוצים לדעת מאיפה המספר הזה הגיע?

357311932

אנו נשתמש בלוח של יוסילה

לוח ה 10	לוח ה 9
$9 - 1 = 8$	$9 - 0 = 9$
$8 - 2 = 6$	$8 - 1 = 7$
$7 - 3 = 4$	$7 - 2 = 5$
$6 - 4 = 2$	$6 - 3 = 3$
$5 - 5 = 0$	$5 - 4 = 1$

ונתחיל לענות, ספרה-ספרה. ה 2 מוצאו 6 פחות 4. ה 3 מוצאו 6 פחות 3 [יש לנו 66 פחות 34].
ה 9 מוצאו 9 פחות 0. ה 1 מוצאו 5 - 4 [יש לנו 966 פחות 034]
וכן יכולים להגיע לשני מספרים אלו.

678655966

- 321344034

בלחשב: אני רואה כי עצם העניין שיוסילה גילה לנו, שהם שתי רמות, לא יכולנו להצליח.
יוסילה: כעת נתפנה לרמה-ב

$$\begin{array}{r} 675081246 \\ - 324918754 \\ \hline 350162492 \end{array}$$

רמה ב' ... הספרות של השורה העליונה יש מהם קטנים מהספרות שבשורה השנייה.
יוסילה: לפני שנתחיל לחפש דרך, איך מגיעים בכוחות עצמנו, לפעולה הזו? הבה ונתנכר
לפעולה, וננסה לנהוג בשאלה בשיטה של רמה-א. האם נגיע? ואם לא! למה?

350162492

השאלה, היא אותה שאלה של מעלה. ונשים לפנינו הלוח 9 או 10. ונטפל בכל ספרה לעצמה!

לוח ה 10	לוח ה 9
$9 - 1 = 8$	$9 - 0 = 9$
$8 - 2 = 6$	$8 - 1 = 7$
$7 - 3 = 4$	$7 - 2 = 5$
$6 - 4 = 2$	$6 - 3 = 3$
$5 - 5 = 0$	$5 - 4 = 1$

ונתחיל לענות, ספרה-ספרה. ה 2 מוצאו 6 פחות 4. ה 9 מוצאו 9 פחות 0.
ה 4 מוצאו ... כאן אנו תקועים!
יוסילה: אין בעיה! אני אעשה לכם לוח חדש!

לוח מתקדם
$11 - 9 = 2$
$12 - 8 = 4$
$13 - 7 = 6$
$14 - 6 = 8$
$15 - 5 = 0$

בלחשב: עדיין זה לא ילד! כי סך $9 + 11 = 20$ ואנו רוצים סך 19 . שתי ספרות החיסור בסך 9 . יוסילה: לא שייך לקבל מספר זוגי, מחיסור שתי ספרות שהם בסך אי-זוגי. למשל, 5 פחות $2 = 3$ $7 = 2 + 5$ סך אי זוגי בפעולה $(5+2)$, נותן 3 , נותן אי זוגי בתשובה. ואם 5 פחות $3 = 2$ $8 = 3 + 5$ סך זוגי בפעולה $(5+3)$, נותן 2 , נותן זוגי בתשובה. גידל: אין להתיימש! הבה ונעשה וודאות שאנו בקיאים ברמה-א. ואז יהיה פחות קשה לגלות הדרך של רמה-ב.

יוסילה: אני מסכים... אני אערוך גישה נאה לרמה-א להעיר, כי רמה-א זו מעידה על עצמה! אין כאן ספרה זוגית חוץ מהספרה הראשונה לימין. 357311932 ואנו צריכים הלוח של 9 .

לוח ה-9
$9 - 0 = 9$
$8 - 1 = 7$
$7 - 2 = 5$
$6 - 3 = 3$
$5 - 4 = 1$

357311932

3	5	7	3	1	1	9	3	2
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
6	7	8	6	5	5	9	6	6
פחות	פחות	פחות	פחות	פחות	פחות	פחות	פחות	פחות
3	2	1	3	4	4	0	3	4
9	9	9	9	9	9	9	9	10

כאן גמרנו עם רמה-א. בלחשב: רגע! גם אני רוצה לבדוק בדרך הסלולה הזו. 135371938

גם זה מספר שרק ספרה זוגית באחדות.

1	3	5	3	7	1	9	3	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	6	7	6	8	5	9	6	6
פחות	פחות	פחות	פחות	פחות	פחות	פחות	פחות	פחות
4	3	2	3	1	4	0	3	4
9	9	9	9	9	9	9	9	10

הנה הגעתי. גידל: אני רגיל להציג פעולת החיסור, כך!

כעת יש לנו להתמודד עם התוצאות האלו. זה לא פשוט, צריך לדעת לשחות טוב.
גידל: אם רצונכם ללכת הביתה.. אני לא מעכב אתכם. לפני חומר מחשבה רב ערך. ובביקור
הבה שלכם, אני אגלה לכם מה שעלה בידי.
ובכך נפרדו החברים ושב הביתה, שמחים מהאווירה היפה שעברה עליהם.
