

קוראים לו

יוסילה מתמטיקה.

ברוכים הבאים לעולם " החשבון לא חשבון "

לפנינו ספור אודות נער שמצא עצמו על אי בודד. ובסופו של דבר
גילה כי בקצה האי היא קיימת איזה עיירה, אלא שאנשיה
קצת מוזרים.
ושם פגש במשפחה שאכסנה אותו להיות כאחד מהם.



אנו נהיה עדים לכל מה שעבר עליו בעיר ההיא.
ונראה מקרוב הפלאי-פלאים שבחשבון ללא חשבון
שנתגלו לו בחיותו ביניהם.



הקדמה אודות "החשבון ללא חשבון"

כשאומרים "חשבון ללא חשבון" אין הכוונה שאין כאן חשבון כלל, אלא המדובר אודות פעולת חשבון כה זעירה עד שילד קטן יכול לתת תשובה לפעולת חשבון כזו. ניקח למשל לוח הכפל של "99" ונראה ביחד כמה זמן ומאמצים אתה צריך להשקיע?

$$\text{למשל: } 4356 \div 99 = ?$$

בבקשה תיגש למהלכי ה"חשבון" שאתה מכיר ורגיל! ... סיימת?

האתגר שבדף זה:

לחת לילד קטן לפתור לנו הפעולה " $4356 \div 99 = ?$ "

↩ תוך שניה אחת, בבקשה!

וכעת, בא ונפתור אותו תרגיל "בחשבון ללא חשבון"

אני מסתכל על המספר "4356"

כן מסתכל כך! "4356"

וכל מה שיש לעשות הוא להוסיף "ועוד אחד"

אני חושב, כי אפילו ילד קטן יכול לפתור לנו תרגיל מסובך זה.

$$4356 \div 99 = 44$$

פרק ו'

b

ולאחר שהגיעו הביתה בזמן, לארוחת צהרים (כי אימא מקפידה מאוד שיהיו כולם נוכחים סביב השולחן בעת ארוחת צהרים). ולאחר שנחו קצת, שבו לביתו של חבוב לקבל הסבר אודות המרווחים.

חבוב: ברוכים הבאים, שוב! ... ברוכים הבאים מכל-מקום.

בלחש: כעת אנו וזמננו לרשותך, אתה יכול להאריך בהסברים כמה שתראה.

חבוב: ועכשיו האם תרשו לי לשוב לנושא המרווחים שהתחלתי בו.

ואלו הן המרווחים של ה 5.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 . 25 . 26
 . 27 . 28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49
 . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56 . 57 . 58 . 59 . 60 . 61 . 62 . 63 . 64 . 65 . 66 . 67 . 68 . 69 . 70

שאלה: איך לדעת כמה מספרים יש בין הקצוות?

. 45 . 46 . 47 . 48 . 49 . 50 .

כאן אני ואתם, ספרנו, וגילינו כי יש 4 מספרים. 49, 48, 47, 46.

הם הנמצאים בין שתי הקצוות 45 ו 50. אך כמובן אין לסמוך על ספירת מספרים.

תשובה לשאלה: $(1 - n)$ כאן $(1 - 5) = 4$

שאלה: 6, 7, 8, 9, אז אמרנו סך הפנימי = סך הקצוות.. $15 = 15$.

אבל כאן אינו כן... 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 ...

$2 \cdot (30 + 35) = (31 + 32 + 33 + 34)$ מה אנו מגלים? כי..

$31 + 32 + 33 + 34 = 120$ פעמיים $30 + 35 = 120$. למה?

הנה הנוסחה של היחס: $(n - 1)/2$ ל $(5 - 1)/2 = 2$

כשמדובר ב n הכוונה על ה 5 או כל מספר מוביל אחר. כי מכל המספרים, כאן, רק 5 הקובע.

$1 + 2 + 3 + 4 =$	10	$= 1 \times 10$	ומה עוד יש לגלות? המספרים האי-זוגיים כפול 10. הן הם סך 4 מספרי התנך. למשל, בין 25 ל 30 יש $29 + 28 + 27 + 26$ שהם 11×10 למה 10? ???
$6 + 7 + 8 + 9 =$	30	$= 3 \times 10$	
$11 + 12 + 13 + 14 =$	50	$= 5 \times 10$	
$16 + 17 + 18 + 19 =$	70	$= 7 \times 10$	
$21 + 22 + 23 + 24 =$	90	$= 9 \times 10$	
$26 + 27 + 28 + 29 =$	110	$= 11 \times 10$	
$31 + 32 + 33 + 34 =$	130	$= 13 \times 10$	
$36 + 37 + 38 + 39 =$	150	$= 15 \times 10$	
$41 + 42 + 43 + 44 =$	170	$= 17 \times 10$	
$46 + 47 + 48 + 49 =$	190	$= 19 \times 10$	
$51 + 52 + 53 + 54 =$	210	$= 21 \times 10$	

כאן אנו רואים כל האי-זוגיים (לפי הסדר) מוכפלים ב 10.

בין 0 ל 5 יש מרווח $10 \times 1 =$ שהם $4 + 3 + 2 + 1$
 בין 5 ל 10 יש מרווח $10 \times 3 =$ שהם $9 + 8 + 7 + 6$
 בין 10 ל 15 יש מרווח $10 \times 5 =$ שהם $14 + 13 + 12 + 11$
 בין 15 ל 20 יש מרווח $10 \times 7 =$ שהם $19 + 18 + 17 + 16$..

$0 + 5 =$	5	$= 1 \times 5$	ומה עוד יש לגלות? המספרים האי-זוגיים כפול 5. הן הם סך 2 הקצוות. למשל, סך 2 הקצוות $55 = 30 + 25$ שהם 11×5
$5 + 10 =$	15	$= 3 \times 5$	
$10 + 15 =$	25	$= 5 \times 5$	
$15 + 20 =$	35	$= 7 \times 5$	
$20 + 25 =$	45	$= 9 \times 5$	
$25 + 30 =$	55	$= 11 \times 5$	
$30 + 35 =$	65	$= 13 \times 5$	
$35 + 40 =$	75	$= 15 \times 5$	
$40 + 45 =$	85	$= 17 \times 5$	
$45 + 50 =$	95	$= 19 \times 5$	
$50 + 55 =$	105	$= 21 \times 5$	

בואו ונראה המרווחים של 7.

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 . 25 . 26
 . 27 . 28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49
 . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56 . 57 . 58 . 59 . 60 . 61 . 62 . 63 . 64 . 65 . 66 . 67 . 68 . 69 . 70

(1 - n) כלומר 7 פחות 1 = 6 מספרים במרווח.

(1 - n)/2 כלומר 7 פחות 1, לחלק ב 2 = 3 פעמים (הפנימי ביחס לקצוות)
 כלומר, אם יש לך סך שתי הקצוות, תכפול ב 3, ותקבל סך הפנימי.

ניקח לדוגמה : המרווח של 49 ו 56

. 49 . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56 .

אנו נמצא בפנים 50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 55 = 3 פעמים (56 + 49)

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =	21	= 1 x 21	ומה עוד יש לגלות?
8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 =	63	= 3 x 21	המספרים האי-זוגיים
15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 =	105	= 5 x 21	כפול 21.
22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 =	147	= 7 x 21	הן הם סך 6 מספרי התנן.
29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 =	189	= 9 x 21	למשל,
36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 =	231	= 11 x 21	בין 28 ל 35 יש
43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 =	273	= 13 x 21	34 + 33 + 32 + 31 + 30 + 29
50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 55 =	315	= 15 x 21	שהם 9 x 21
57 + 58 + 59 + 60 + 61 + 62 =	357	= 17 x 21	למה 21?
64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69 =	399	= 19 x 21	???
71 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 =	441	= 21 x 21	

למה? למה המספר האי-זוגי מוכפל ב 3 אם מדובר במרווח 3, 6, 9, ...

למה המספר האי-זוגי מוכפל ב 10 אם מדובר במרווח 5, 10, 15, ...

למה המספר האי-זוגי מוכפל ב 21 אם מדובר במרווח 7, 14, 21, ...

יוסילה: גם אני שואל אותה שאלה...

חשוב: אבל עוד לא ראינו סך הקצוות!

0 + 7 =	7	= 1 x 7	ומה עוד יש לגלות?
7 + 14 =	21	= 3 x 7	המספרים האי-זוגיים
14 + 21 =	35	= 5 x 7	כפול 7.
21 + 28 =	49	= 7 x 7	הן הם סך 2 הקצוות.
28 + 35 =	63	= 9 x 7	למשל
35 + 42 =	77	= 11 x 7	סך 2 הקצוות
42 + 49 =	91	= 13 x 7	77 = 42 + 35
49 + 56 =	105	= 15 x 7	שהם 11 x 7
56 + 63 =	119	= 17 x 7	
63 + 70 =	133	= 19 x 7	
70 + 77 =	147	= 21 x 7	

יוסילה: את זה אני מבין, n = 7 אכן אנו מקבלים 7 כפול האי-זוגי. וכמו בתרגיל הקודם, בהיות

n = 5 קבלנו 5 כפול כל האי-זוגי. אך כשמדובר הפנימיים של המרווח, מה שייכות לאותם

המספרים.. 3 למרווחי 3? 10 למרווחי 5? 21 למרווחי 7?

חשוב: תשמענה אוזניך, מה שפיך מדבר! 3 למרווחי 3? 10 למרווחי 5? 21 למרווחי 7?

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	
L ₁	1	1			למרווחים של 3
L ₂	1	2	1		המכפיל לאי-זוגי = 3.
L ₃	1	3	3	1	למרווחים של 5
L ₄	1	4	6	4	המכפיל לאי-זוגי = 10.
L ₅	1	5	10	10	למרווחים של 7
L ₆	1	6	15	20	המכפיל לאי-זוגי = 21.
L ₇	1	7	21	35	

השמתם לב עד כמה סבא, חודר עמוק בטבלה של פסקאל ? מה למרווחים ולטבלה זו? אבל אצל סבא, הדבר בתכלית הפשטות.

קודם נראה העניין בנוסחאות. ואחר כך נעבור לטבלה.
לזה יש לענות על השאלה: איך למצוא סך המרווחים שבין הקצוות?
 תשובה: סך שתי קצוות, כפול היחס.

$$315 = 3 \times 105 = ((1 - 7)/2) (56 + 49) \text{ יותר נכון } ((1 - n)/2) (56 + 49) = 105 \times 3 = 315$$

$$(49 + 56) ((7 - 1)/2) = 105 \times 3 = 315$$

49 . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56
 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 . 25 . 26
 . 27 . 28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49
 . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56 . 57 . 58 . 59 . 60 . 61 . 62 . 63 . 64 . 65 . 66 . 67 . 68 . 69 . 70

יוסילה: זה ברור, היות כי . 49 . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56

הרי כולם שווים, $315 = (1 - 7)/2 \times 105 = 53 + 52 = 54 + 51 = 55 + 50 = 56 + 49$,
 חבוב: לזכור כי " $(1 - 7)/2$ " מובנו "החצי הקטן" של ה 7. ומובנו, 3 שוגות מספרים, במרווח.
 וחושבני שהטבלה הבאה מספרת לנו דברים חשובים.. תסתכלו ותגידו לי מה אתם רואים?

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	
L ₁	1	1									כשהמרווחים מ 0 ל 3 ל 6 ל 9 ... יש למצוא המרווח הפנימי 3 כפול האי-זוגי
L ₂	1	2	1								
L ₃	1	3	3	1							כשהמרווחים מ 0 ל 5 ל 10 ל 15 ... יש למצוא המרווח הפנימי 10 כפול האי-זוגי
L ₄	1	4	6	4	1						
L ₅	1	5	10	10	5	1					כשהמרווחים מ 0 ל 7 ל 14 ל 21 ... יש למצוא המרווח הפנימי 21 כפול האי-זוגי
L ₆	1	6	15	20	15	6	1				
L ₇	1	7	21	35	35	21	7	1			
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	1		כשהמרווחים מ 0 ל 9 ל 18 ל 27 ... יש למצוא המרווח הפנימי 36 כפול האי-זוגי
L ₉	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	

האם אתם מבינים דברי סבא, בלוח הזה? מה הכוונה באומרו...

כשהמרווחים מ 0 ל 7 ל 14 ל 21 ...

יש למצוא המרווח הפנימי 21 כפול האי-זוגי

כלומר כאשר יש לנו עסק במרווח המתחיל ב 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

מה אנו אומרים? מ 1 ועד 6 זה שווה 21.

אבל מה סבא אומר? מ 1 ועד 6 זה שווה $1 * 21$, והקבוצה הבאה $3 * 21 = \dots$ (כפול 5, כפול 7, ...).

ובאמת כן הוא. 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 עבור $63 = 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8$ [כלומר $3 * 21$].

ואם נרצה לדעת אודות $56 + 57 + 58 + 59 + 60 + 61 + 62 + 63$ כמובן יש לכפול ה 21 באי-זוגי השייך.

וכעת נשאלת השאלה. איך למצוא האי-זוגי השייך?

יוסילה: נכון! טנו כבר ראינו כל זה, אבל טוב לחזור עליהם, אנו קולטים יותר טוב דרך ההסבר הנוסף.

חבוב: התשבה כמובן מכאן ולא ממקום אחר.

$$17 = 7 \div (63 + 56)$$

כלומר כופלים 21 שנמצא בתא ליד ה 7. אותו 21 כופלים ב 17.

יוסילה: שלא תחשוב שלא קלטנו מפעם ראשונה... אנו עדיין זוכרים מה שנאמר בבוקר!

$$56 = 7 * 8 \dots 63 = 7 * 9 \text{ נמצא } 17 = 9 + 8 \text{ האי-זוגי המבוקש!}$$

ובכך מגיעים לסך המרווח שבין 56 ל 63. $17 * 21$ נותן 357.

חבוב: אני ממש נהנה לשמוע את יוסילה, והדרך בה מתעניין בפולחן "שלנו".

יוסילה: אני רואה שסבא הרחיק לכת מאוד-מאוד עם הטבלה הזו.

חשוב: תסביר לנו איך קלטתה את זה?

יוסילה: הטבלה הזו מעידה על המכפיל המסתורי שכופל האי-זוגי ...

למרווחי ה-3 שמתחיל ב-1+2 יש לכפול כל האי-זוגיים במכפיל 3 (שלמעשה הם $3 = 2 + 1$)

למרווחי ה-5 שמתחיל ב-1+2+3+4 יש לכפול כל האי-זוגיים במכפיל 10 (שלמעשה הם $10 = 4 + 3 + 2 + 1$)

למרווחי ה-7 שמתחיל ב-1+2+3+4+5+6 יש לכפול כל האי-זוגיים במכפיל 21 (שהם $21 = 6 + \dots + 1$)

וכן לכל מרווח שיהיה.

חשוב: אתה מבין כי סבא לא חידש שום דבר היות כי למעשה $21 = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$...

יוסילה: אבל אינו דומה! כאן אתה יכול למצוא גם האי זוגי של $17 = 7 \div (56 + 63)$

ולאחר צעד זה לעבור ל-21.

ואם ברצונך בנוסחא אחידה.. $7 \cdot 3 \cdot 17 = 7 \cdot ((1 - 7)/2) \cdot ((63 + 56)/7)$

וסך המרווח $17 \times 21 = 357$ וכאילו עשינו $357 = 3 (56 + 63)$

בלחשב: בדיוק מה שאנו נמנעים ממנו. "נוסחא אחידה". האינך רואה כמה זה מסובך? בכמה

חצאי עיגול השתמשת?

זה נכון! אבל, לא כל מה שנכון, שייך לתפיסה הסברתית. התפיסה ההסברתית הפשוטה שלנו,

אין בה מספיק כוח לעמוד בפני פרטי הנוסחה!

חשוב: אם תרצה, הנה פירוט דברך, יוסילה.

האי-זוגי כפול 3			האי-זוגי כפול 10			האי-זוגי כפול 21		
$1 + 2 =$	3	$= 1 \times 3$	$1 + 2 + 3 + 4 =$	10	$= 1 \times 10$	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =$	21	$= 1 \times 21$
$4 + 5 =$	9	$= 3 \times 3$	$6 + 7 + 8 + 9 =$	30	$= 3 \times 10$	$8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 =$	63	$= 3 \times 21$
$7 + 8 =$	15	$= 5 \times 3$	$11 + 12 + 13 + 14 =$	50	$= 5 \times 10$	$15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 =$	105	$= 5 \times 21$
$10 + 11 =$	21	$= 7 \times 3$	$16 + 17 + 18 + 19 =$	70	$= 7 \times 10$	$22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 =$	147	$= 7 \times 21$
$13 + 14 =$	27	$= 9 \times 3$	$21 + 22 + 23 + 24 =$	90	$= 9 \times 10$	$29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 =$	189	$= 9 \times 21$
$16 + 17 =$	33	$= 11 \times 3$	$26 + 27 + 28 + 29 =$	110	$= 11 \times 10$	$36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 =$	231	$= 11 \times 21$
$19 + 20 =$	39	$= 13 \times 3$	$31 + 32 + 33 + 34 =$	130	$= 13 \times 10$	$43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 =$	273	$= 13 \times 21$
$22 + 23 =$	45	$= 15 \times 3$	$36 + 37 + 38 + 39 =$	150	$= 15 \times 10$	$50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 55 =$	315	$= 15 \times 21$
$25 + 26 =$	51	$= 17 \times 3$	$41 + 42 + 43 + 44 =$	170	$= 17 \times 10$	$57 + 58 + 59 + 60 + 61 + 62 =$	357	$= 17 \times 21$
$28 + 29 =$	57	$= 19 \times 3$	$46 + 47 + 48 + 49 =$	190	$= 19 \times 10$	$64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69 =$	399	$= 19 \times 21$
$31 + 32 =$	63	$= 21 \times 3$	$51 + 52 + 53 + 54 =$	210	$= 21 \times 10$	$71 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 =$	441	$= 21 \times 21$

בלחשב: זו עבודה גדולה, למלאות לוח כזה!

חשוב: אנו בחרנו במרווחים שבין 3, 6, 9, ... או במרווחים שבין 5, 10, 15, ... או במרווחים שבין

7, 14, 21, ... וכדומה.

אבל לא עסקנו במרווחים שבין 4, 8, 12, ... או במרווחים שבין 6, 12, 18, ... או במרווחים שבין

8, 16, 24, ... וכדומה.

בואו ונבדוק מרווחי ה-8 ... (לשים לב, כולם מרומזים בין ה-0 לקצה הראשון, בכאן ה-8) סך 1 ועד 7 $28 = 7 \times 4$

0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 . 25 .
26 . 27 . 28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 .
49 . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56 . 57 . 58 . 59 . 60 . 61 . 62 . 63 . 64 . 65 . 66 . 67 . 68 . 69 . 70 . 71 .
72 .

$7 + \dots + 1$	28	$= 1 \times 28$
$15 + \dots + 9$	84	$= 3 \times 28$
$23 + \dots + 17$	140	$= 5 \times 28$
$31 + \dots + 25$	196	$= 7 \times 28$
$39 + \dots + 33$	252	$= 9 \times 28$

המסקנה... עולם המרווחים משתמש במכפיל מסתורי, אותו מכפיל הנו כופל כל המספרים

האי-זוגיים. ומכפיל זה מרומז בלוח של פסקל. הכל נמצא בעמודה-2. זה כשלעצמו מציאה,

שאלולי סבא היה מגלה התגלית הזו...

איני חושב שמישהו בעולם היה עולה בידו אותם הגילויים.

יוסילה: זה לא כל כך אמת, היות וכולנו יודעים (למשל) כי 28 שליד 8 עניינו (העמודה) מ 1 ועד 7.

אז מה כל הרעש שאתה עושה בעניין הזה?

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄
L ₁	1	1			
L ₂	1	2	1		
L ₃	1	3	3	1	
L ₄	1	4	6	4	1
L ₅	1	5	10	10	5
L ₆	1	6	15	20	15
L ₇	1	7	21	35	35
L ₈	1	8	28	56	70
L ₉	1	9	36	84	126

חשוב: החידוש הוא, שסבא לא גילה רק כי במרחב הפנימי שבין 0 ל 8 הסך מ 1 ועד $28 = 7$ אלג גילה איך להגיע לסך כל מרחב. הנה המרחב שבין 8 ועד $16 = 3$ פעמים (סך 1 ועד 7) וכן המרחב שבין 16 ועד $24 = 5$ פעמים (סך 1 ועד 7) וכן כל המרווחים הפנימיים ביחס לאותו 28 שבלוח ליד ה 8.

ואף גילה כי (למשל) $5 = 8 \div 40 = 8 \div (24 + 16)$. כלומר המרווח הפנימי $28 = 5$ פעמים 5 כך שאינך צריך להסתכל בשום לוח למצוא כמה זה.

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	כאן אנו מסתפקים בעמודות 1 ו 2 . שם C ₂ ו C ₁ *** הערה: ידוע לנו כי מרווח ראשון ל 5 $10 = 1+2+3+4$ והמספר 10 נמצא בתא שליד תא ה 5.
L ₁	1	1			
L ₂	1	2	1		
L ₃	1	3	3	1	כשהמרווחים מ 0 ל 3 ל 6 ל 9 ... יש למצוא המרווח הפנימי 3 כפול כל האי-זוגי
L ₄	1	4	6	4	כשהמרווחים מ 0 ל 4 ל 8 ל 12 ... יש למצוא המרווח הפנימי 6 כפול כל האי-זוגי
L ₅	1	5	10	10	כשהמרווחים מ 0 ל 5 ל 10 ל 15 ... יש למצוא המרווח הפנימי 10 כפול כל האי-זוגי
L ₆	1	6	15	20	כשהמרווחים מ 0 ל 6 ל 12 ל 18 ... יש למצוא המרווח הפנימי 15 כפול כל האי-זוגי
L ₇	1	7	21	35	כשהמרווחים מ 0 ל 7 ל 14 ל 21 ... יש למצוא המרווח הפנימי 21 כפול כל האי-זוגי
L ₈	1	8	28	56	כשהמרווחים מ 0 ל 8 ל 16 ל 24 ... יש למצוא המרווח הפנימי 28 כפול כל האי-זוגי
L ₉	1	9	36	84	כשהמרווחים מ 0 ל 9 ל 18 ל 27 ... יש למצוא המרווח הפנימי 36 כפול כל האי-זוגי

וכעת, כדרכנו, יש להציע תרגיל. מה הוא המרווח שבין 56 ל 64? ואיזה פרטים כדאי להזכיר.

56 . 57 . 58 . 59 . 60 . 61 . 62 . 63 . 64

בלחשב: את ה 28 יש לנו אותו מהמרחב מ 1 ועד $28 = 7$

כעת עלינו למצוא האי-זוגי הכופל 28!

יוסילה: יש להיזכר בדרך שהלכנו בה!

$$56 \div 8 = 7 ; 64 \div 8 = 8$$

אם נחבר $7 + 8$ נקבל המספר האי-זוגי 15.

בלחשב: 15 כפול $28 = 420$

חשוב: להזכיר לכם, כי יכולים להגיע ישירות בהסתכל במרווח הזה

56 . 57 . 58 . 59 . 60 . 61 . 62 . 63 . 64

יש לנו כאן 7 מספרים במרווח. כי יש לנו מספר באמצע, שהוא הממוצע של השבע מספרים.

אז! $60 = 7$ כפול 420 לא כן! את זה אין לנו אותו במרווחים האי-זוגיים.

חשוב: בזה סיימנו עם המרווחים... אם יש הערות?

יוסילה: רציתי להבחין בין המרווח הזוגי לאי-זוגי. בין מרווחי "0 ועד 7", ל "0 ועד 8"?

בלחשב: בדרך כלל יש שני שלבים.

1- למצוא הסך הראשון.

2- למצוא האי-זוגי שיכפול אותו.

יוסילה: לאי-זוגי. למשל, מ 0 ועד 7 למדנו היום ... הסך הראשון = האי-זוגי כפול חציו הקטן.

כלומר, 7 כפול $3 = 21$ אותו 21 אנו נכפול באי-זוגי בהתאם.

בלחשב: האי-זוגי, אפשר למצוא, הן סך הקצוות לחלק ב 7? והן לחלק כל קצה ב 7, ולחבר המספרים.

למשל, מ 63 ועד 70

- אפשרות האחת היא $133 = 70 + 63$ שאותו יש לחלק ב 7 $19 = 7$

- האפשרות האחרת היא 63 לחלק ב 7 $9 = 7$. 70 לחלק ב 7 $10 = 7$ ביחד $19 = 10 + 9$

יוסילה: לזוגי. למשל, מ 0 ועד 8 למדנו היום ... הסך הראשון = מ 1 ועד 7 $28 = 7$ אותו 28 אנו נכפול באי-זוגי בהתאם

בלחשב: הזוגי, אפשר למצוא, הן סך הקצוות לחלק ב 8? והן לחלק כל קצה ב 8, ולחבר המספרים.

למשל, מ 64 ועד 72

- אפשרות האחת היא $136 = 72 + 64$ שאותו יש לחלק ב 8 $17 = 8$

- האפשרות האחרת היא 64 לחלק ב 8 $8 = 8$. 72 לחלק ב 8 $9 = 8$ ביחד $17 = 9 + 8$

יוסילה: לא לשכוח האפשרות הבלעדית למצו סך המרווח הזוגי. הממוצע כפול האי-זוגי המתאים. במרווח הזה, הממוצע הוא 68.

64 . 65 . 66 . 67 . 68 . 69 . 70 . 71 . 72 .

חבוב: חצי הזוגי יוביל אותנו לממוצע! 72 פחות $(8/2) = 64$ ועוד $(8/2) = 68$.
והנה סיכום מה שראינו מקודם.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 =$	21	$= 1 \times 21$	0 ... 7	$0=0 \times 7 ; 7=1 \times 7$	$0+1 = 1$
$8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 =$	63	$= 3 \times 21$	7 ... 14	$7=1 \times 7 ; 14=2 \times 7$	$1+2 = 3$
$15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 =$	105	$= 5 \times 21$	14 ... 21	$14=2 \times 7 ; 21=3 \times 7$	$2+3 = 5$
$22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 =$	147	$= 7 \times 21$	21 ... 28	$21=3 \times 7 ; 28=4 \times 7$	$3+4 = 7$
$29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 =$	189	$= 9 \times 21$	28 ... 35	$28=4 \times 7 ; 35=5 \times 7$	$4+5 = 9$
$36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 =$	231	$= 11 \times 21$	35 ... 42	$35=5 \times 7 ; 42=6 \times 7$	$5+6 = 11$
$43 + 44 + 45 + 46 + 47 + 48 =$	273	$= 13 \times 21$	42 ... 49	$35=5 \times 7 ; 42=6 \times 7$	$6+7 = 13$
$50 + 51 + 52 + 53 + 54 + 55 =$	315	$= 15 \times 21$	49 ... 56	$35=5 \times 7 ; 42=6 \times 7$	$7+8 = 15$
$57 + 58 + 59 + 60 + 61 + 62 =$	357	$= 17 \times 21$	56 ... 63	$35=5 \times 7 ; 42=6 \times 7$	$8+9 = 17$
$64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69 =$	399	$= 19 \times 21$	63 ... 70	$35=5 \times 7 ; 42=6 \times 7$	$9+10 = 19$
$71 + 72 + 73 + 74 + 75 + 76 =$	441	$= 21 \times 21$	70 ... 77	$35=5 \times 7 ; 42=6 \times 7$	$10+11 = 21$

בלחשב: אנו נהננו מאוד מהשיעור שלך ... אני חושב אם נשב עד מחר בכל רגע תמצא מה להגיש לנו מפולחני סבא !

חבוב: ועכשיו תרשו לי לתת תרגיל ליוסילה?

יוסילה: אני לרשותך, שאל שאלתך !

חבוב: נניח שאנו נמצאים בתחום ה 13. וכעת אני רוצה שתמצא לי המרווח שבין (8×13) לבין (9×13) כלומר בין 104 ל 117 ? אלא רצוני שתגיע דרך המכפיל המסתורי כפול המספר האי-זוגי השייך.

יוסילה: פשוט מאוד! האי-זוגי השייך אינו אלא $8 + 9 = 17$, נכון ?

חבוב: נכון מאוד !

יוסילה: והמכפיל המסתורי אינו אלא ה $\frac{1}{2}$ הקטן ל 13 הכופל $6 \times 13 = 78$, נכון ?

חבוב: נכון ! אתה התיחסת למציאת התא ליד ה 13 $(78 = \frac{1}{2} \div 12 \times 13)$

יוסילה: וכעת המרווח בין (8×13) לבין (9×13) $1326 = 17 \times 78$

בלחשב: תנו לי לבדוק כל זה לפי השיטה הישנה.

המרווח בין (8×13) לבין (9×13) כלומר המרווח בין 104 לבין 117

שהם: 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117

אנו נמצאים בתחום ה 13. כלומר יש לנו מספרים פנימיים, $13 - 1 = 12$ שהם 6 לצד 6

שהם המספרים בפנים 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117 במילים אחרות

$111 + 110 = 112 + 109 = 113 + 108 = 114 + 107 = 115 + 106 = 116 + 105 = 117 + 104$

$1326 = 221$ אותם יש לכפול ב 6 (6 זוגות מספרים פנימיים)

חבוב: נוסחת כמה מספרים במרווח? $(1 - n)$

עבור	כך מספרים לכל מרווח.	עבור	כך מספרים לכל מרווח.
2	$1 = (1 - 2) \leftarrow (1 - n)$	3	$2 = (1 - 3) \leftarrow (1 - n)$
4	$3 = (1 - 4) \leftarrow (1 - n)$	5	$4 = (1 - 5) \leftarrow (1 - n)$
6	$5 = (1 - 6) \leftarrow (1 - n)$	7	$6 = (1 - 7) \leftarrow (1 - n)$
8	$7 = (1 - 8) \leftarrow (1 - n)$	9	$8 = (1 - 9) \leftarrow (1 - n)$
10	$9 = (1 - 10) \leftarrow (1 - n)$	11	$10 = (1 - 11) \leftarrow (1 - n)$

יוסילה: מעניין איך שסבא מסדר את העניינים.

חבוב: ובכן אני נותן לכם עוד לוח מתוצרת "סבא" ... אני לא נותן שום הסבר וגם אתם ... רק תסתכלו, ותבינו מה שתבינו ... ואני בטוח אם כל מה שנאמר היום נקלט אצלכם, אין לי ספק שתדעו מה הם כוונות סבא בזה.

$\frac{1}{2} = (1 - 2)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	2	$1 = (1 - 3)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	3
$1 \frac{1}{2} = (1 - 4)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	4	$2 = (1 - 5)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	5
$2 \frac{1}{2} = (1 - 6)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	6	$3 = (1 - 7)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	7
$3 \frac{1}{2} = (1 - 8)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	8	$4 = (1 - 9)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	9
$4 \frac{1}{2} = (1 - 10)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	10	$5 = (1 - 11)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	11

ואכן עושים כך.

$1 = (1 - 2)2/2 \leftarrow (1 - n)/2$	2	$3 = 3*(1 - 3)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	3
$6 = (1 - 4)4/2 \leftarrow (1 - n)/2$	4	$10 = 5*(1 - 5)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	5
$15 = (1 - 6)6/2 \leftarrow (1 - n)/2$	6	$21 = 7*(1 - 7)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	7
$28 = (1 - 8)8/2 \leftarrow (1 - n)/2$	8	$36 = 9*(1 - 9)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	9
$45 = (1 - 10)10/2 \leftarrow (1 - n)/2$	10	$55 = 11*(1 - 11)/2 \leftarrow (1 - n)/2$	11

בלחשב: יש לזכור מה שאמרת בעניין הממוצע, המספר הסמלי ...

הממוצע למספרים הזוגיים כמו ל 8 וכדומה, הוא מספר זוגי.

ההסבר כי סך הקצוות לזוגי הוא מספר זוגי. וסך הקצוות לאי-זוגי הוא מספר אי-זוגי.

משל, סך הקצוות 56 ו 64 (בתחום ה 8) $120 = 64 + 56$ והוא מספר זוגי.

משל, סך הקצוות 56 ו 63 (בתחום ה 7) $119 = 63 + 56$ והוא מספר אי-זוגי.

המשך יבוא!