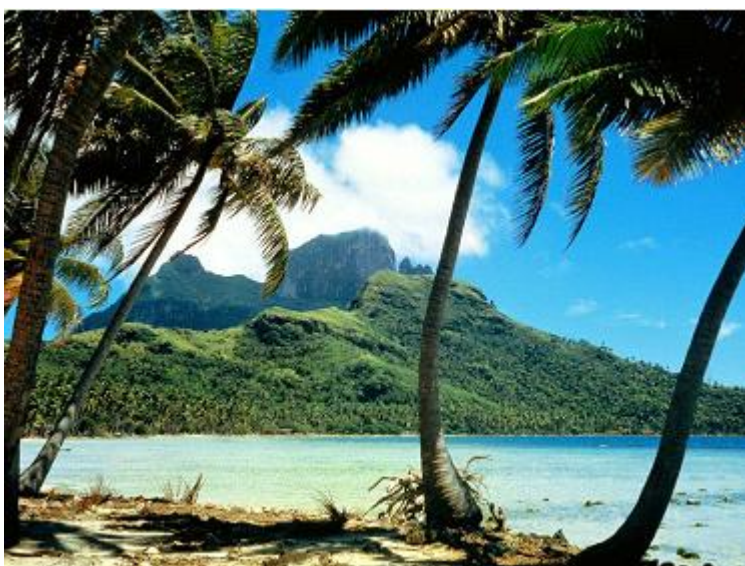


קוראים לו

יוסילה מתמטיקה.

ברוכים הבאים לעולם
"החשבון לא חשבון"

לפנינו ספור אודות נער שמצא עצמו על אי בודד. ובסופו של דבר
גילה כי בקצה האי ההיא קיימת איזה עיירה, אלא שאנשיה
קצת מוזרים.
ושם פגש במשפחה שאכסנה אותו להיות כאחד מהם.



אנו נהיה עדים לכל מה שעבר עליו בעיר ההיא.
ונראה מקרוב הפלאי-פלאים שבחשבון ללא חשבון
שנתגלו לו בחיותו ביניהם.



הקדמה אודות "החשבון ללא חשבון"

כשאומרים "חשבון ללא חשבון" אין הכוונה שאין כאן חשבון כלל, אלא המדובר אודות פעולת חשבון כה זעירה עד שילד קטן יכול לתת תשובה לפעולת חשבון כזו. ניקח למשל לוח הכפל של "99" ונראה ביחד כמה זמן ומאמצים אתה צריך להשקיע?

$$\text{למשל: } 4356 \div 99 = ?$$

בבקשה תיגש למהלכי ה"חשבון" שאתה מכיר ורגיל! ...
סיימת?

האתגר שבדף זה:

לתת לילד קטן לפתור לנו הפעולה " $4356 \div 99 = ?$ "

⬅ תוך שניה אחת, בבקשה!

וכעת, בא ונפתור אותו תרגיל "בחשבון ללא חשבון"

אני מסתכל על המספר "4356"

כן מסתכל כך! "4356"

וכל מה שיש לעשות הוא להוסיף "ועוד אחד"

אני חושב, כי אפילו ילד קטן יכול לפתור לנו תרגיל מסובך זה.

$$4356 \div 99 = 44$$

פרק ו'

C

חבוב: ועכשיו רצוני לדעת מה אתם חושבים על מרווחי הריבועים? המרווח שבין 0 ל 4 ל 9 ל 16 ל 25 ל ... האם גם אלו יוכלו להיות תחת שליטה? כמובן, זה הפולחן שייך לסבא. בלחשב: הסבא שלי יש לו חוש מסוים, שלפני שיצא לחיפוש הוא בטוח למה יש לו לצפות. יוסילה: על כל פנים, המרווח המדובר בו שונה לחלוטין מהמרווח של המספרים הפשוטים. כי אם תשאל אותי מה יש בין 49 ל 64 ? כמה מספרים, ומה הסך שלהם וכהנה שאלות... אי אפשר לענות ללא חישובים ארוכים. חבוב: תראו...

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 . 25 . 26 . 27 . 28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49 . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56 . 57 . 58 . 59 . 60 . 61 . 62 . 63 . 64 . 65 . 66 . 67 . 68 . 69 . 70 . 71 . 72 . 73 . 74 . 75 . 76 . 77 . 78 . 79 . 80 . 81 . 82 . 83 . 84 . 85 . 86 . 87 . 88 . 89 . 90 . 91 . 92 . 93 . 94 . 95 . 96 . 97 . 98 . 99 . 100 . 101 . 102 . 103 . 104 . 105 . 106 . 107 . 108 . 109 . 110 . 111 . 112 . 113 . 114 . 115 . 116 . 117 . 118 . 119 . 120 . 121 .

להסתכל ולראות מה ניתן לגלות!

בלחשב: למה אתה רוצה להגיע?

חבוב: ראשית כל להבחין מה שנראה לעיין... השמתם לב כי כל המרווחים כוללים זוגות של מספרים?

16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9

ומובן מאליו הטעם לכך, כי כל הקצוות, תמיד האחד זוגי והאחד אי-זוגי. ויש לזכור הפרט הזה? למשל, מ 1 ועד 4 יש ביניהם זוג מספרים 2, 3. מ 4 ועד 9 יש ביניהם שני זוגות מספרים (ארבע מספרים) 5, 6, 7, 8.

יוסילה: נכון, אבל... כעת אני מתעורר להבחין כי הריבועים הם אחד זוגי ואחד אי-זוגי... בלחשב: סבא פותח לנו העיניים לראות מה שלפנינו, כי הרבה דברים שמול עינינו ואין אנו ערים להם. ולאמתו של דבר היוצא מהזוגי-זוגי וההפך. 1, 3, 5, 7, 9, ... (1, 9, 25, 49, 81...) הרבוע שלהם אינו זוגי. לא כן 2, 4, 6, 8, ... (4, 16, 36, 64...) הריבוע שלהם תמיד זוגי.

חבוב: ואם נשים לב עוד נגלה כי המרווח הראשון יש בו 2 מספרים, המרווח השני יש בו 4 מספרים, ושלאחריו 6 מספרים, ושלאחריו 8 מספרים, ... וכן הלאה.

9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16

על מה יש להתבסס כשאני מכריז כי יש שש מספרים במרווח? בשביל שספרתי אותם? חוץ מלספור, איך ניתן לדעת כי הם 6 מספרים?

בלחשב: רק לאחר שעוררת את השאלה... נראו לי שתי אפשרויות. סבא תמיד לימד אותי לבדוק במה שלרשותי. ולרשותי אך ורק 9 ו 16 ... אך ורק שתי קצוות האלו, ובעזרתם אני אמור להגיע! ובהם עדיין איני מגלה שום 6.

אך מזווית זו נתן לראות $9 = 3^2$ ולעשות מאותו $3 \leftarrow 6 \dots 3 \times 2 = 6$ שלוש זוגות מספרים במרווח. אך עדיין עוד אפשרות מזווית שנייה. לראות $9 = 3^2$ ו $16 = 4^2$ ואז להיעזר ב "פחות 1" כלומר $3 + 4$ פחות 1 = 6.

יוסילה: מתוך דברייך, בלחשב, יש להסיק מסקנה. כי השורה של שישה מספרים תלויה בקצה הקטן. ב 9 יותר מב 16. כי היא באמת כוללת 3 מספרים פעמיים (שלוש זוגות מספרים במרווח), ו 3 שייך ל 9 ולא ל 16.

נמצא, חצי המרווח = 3 השייך ל 3^2 . והפעולה הסופית, לעשות 3 פעמים הקצוות (9 + 16) למצוא הסך הפנימי $3(9 + 16) = 3 \times 25 = 75$ הסך הפנימי.

בלחשב: לי נראים דברי יוסילה. כי יש לתלות בקצה הראשון (9) ולא בקצה האחרון (42).

חבוב: אני אסביר לכם לוח זה... צעד אחר צעד... בין עמודה-1 לעמודה-2 הכנסתי איזה פרטים.
אני אסביר הכל.

	C ₀	C ₁	x ²	=	C ₁	C ₂		=	C ₂	C ₃
L ₀	1	0	0 ²	0	0			0		
L ₁	1	1	1 ²	1	1		1+(1x4)	1x5	5	
L ₂	1	2	2 ²	4	2	1	1+(3x4)	2x13	26	1
L ₃	1	3	3 ²	9	3	3	1+(6x4)	3x25	75	3
L ₄	1	4	4 ²	16	4	6	1+(10x4)	4x41	164	6
L ₅	1	5	5 ²	25	5	10	1+(15x4)	5x61	305	10
L ₆	1	6	6 ²	36	6	15	1+(21x4)	6x85	510	15
L ₇	1	7	7 ²	49	7	21	1+(28x4)	7x113	791	21
L ₈	1	8	8 ²	64	8	28	1+(36x4)	8x145	1160	28
L ₉	1	9	9 ²	81	9	36	1+(45x4)	9x181	1629	36

חיבור עמודה-1 עם עמודה-2 נותן לנו התא בעמודה-2 בשורה תחתונה יותר.
למשל, $28 = 21 + 7$, כאשר 28 ו-21 מסתכלים בלוח, ו-7 הוא למטה מ-21 באותה עמודה-2.

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃
L ₆	1	6	15	20
L ₇	1	7	21	35
L ₈	1	8	28	56

אנו נתמקד בהבנת שורה-7...

	C ₀	C ₁	x ²	=	C ₁	C ₂		=	C ₂	C ₃
L ₇	1	7	7 ²	49	7	21	1+(28x4)	7x113	791	21

ה-7 הנמצא בעמודה-1 אנו נסתכל עליו כאילו $49 = 7^2$
לזכור, אם בחרנו שורה-7, כי רצינו לדעת סך המרווח מ-7 ועד 8^2 . ותקוותנו להגיע דרך שורה-7.
49 . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56 . 57 . 58 . 59 . 60 . 61 . 62 . 63 . 64
נשוב ונסתכל בשורה-7

	C ₀	C ₁	x ²	=	C ₁	C ₂		=	C ₂	C ₃
L ₇	1	7	7 ²	49	7	21	1+(28x4)	7x113	791	21

כמובן, פעולה זו $1+(28x4)$ צריכה הסבר.
לעת עתה, המספר המתקבל מאותה פעולה (113), יש לכפול אותו במה שיש לנו בעמודה-1. (7)

$$7 \times 113 = 791$$

לאחר ההקדמה הבאה, נוכל להבין מה עניינה של אותה פעולה $1+(28x4)$
יש לזכור כי $113 = 64 + 49 = 8^2 + 7^2$
וכמוכן, אם רוצים, $112 = 2 * 8 * 7$; $112 = 1 + 112$
וכאן השכל של סבא עושה את שלו!
שימו לב איך סבא חשב להגיע דרך הלוח שלרשותנו.
אנו אמרנו כי כל מספרים עוקבים, הם, אחד זוגי, והאחר אי-זוגי.
וכן הדבר בפעולה זו! $112 = 2 * 8 * 7$; $112 = 1 + 112$
היות ולרשותנו מספר זוגי, ה-8, ועוד מספר זוגי אחר, שהוא (כפול) 2.
סבא העדיף להביא שינוי באותה פעולה.
 $112 = 2 * 8 * 7$ ← $112 = 4 * 4 * 7$ ← $112 = 4 * 28$
ובמקום כל התהליך הזה, סבא מוסר לנו איך להגיע דרך הלוח.

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅
L ₆	1	6	15	20	15	6
L ₇	1	7	21	35	35	21
L ₈	1	8	28	56	70	56

נמצא בפעולה זו אנו כבר מוצאים סך הקצוות.

$$1+(28 \times 4)$$

כעת שיש לנו סך הקצוות, אנו יכולים לדעת סך המרווח שבין 7^2 ל 8^2 ... שבין 49 ל 64!
 כבר למדנו כי יש בפנים המרווח, 7 זוגות מספרים, שסך כל זוג = לסך הקצוות.

נמצא 7 פעמים $113 = 791$

	C ₀	C ₁	x ²	=	C ₁	C ₂			=	C ₂	C ₃
L ₇	1	7	7 ²	49	7	21	1+(28x4)	7x113	791	21	35
L ₈	1	8	8 ²	64	8	28	1+(36x4)	8x145	1160	28	56

כעת אם יש לכם שאלות?

יוסילה: מי סדר מה שבין העמודות? אתה או סבא?

חבוב: מה שבין העמודות, זה אני סדרתי. כמובן בהתאם להסברים של סבא. למה אתה שואל?

יוסילה: כי נראה לי, יותר סביר להגיש העבודה שלך כך

	C ₀	C ₁	x ²	=	C ₁	C ₂			=	C ₂	C ₃
L ₀	1	0	0 ²	0	0						
L ₁	1	1	1 ²	1	1				0		
L ₂	1	2	2 ²	4	2	1	1+(1x4)	1x5	5	1	
L ₃	1	3	3 ²	9	3	3	1+(3x4)	2x13	26	3	1
L ₄	1	4	4 ²	16	4	6	1+(6x4)	3x25	75	6	4
L ₅	1	5	5 ²	25	5	10	1+(10x4)	4x41	164	10	10
L ₆	1	6	6 ²	36	6	15	1+(15x4)	5x61	305	15	20
L ₇	1	7	7 ²	49	7	21	1+(21x4)	6x85	510	21	35
L ₈	1	8	8 ²	64	8	28	1+(28x4)	7x113	791	28	56
L ₉	1	9	9 ²	81	9	36	1+(36x4)	8x145	1160	36	84

כלומר, לחפש ה 28 איפה שנמצא!

חבוב: אני מסכים אתך! אולי כך יותר נכון, כמו שעשית.

אם כבר אני מדבר על עצמי, הנה החידוש או יותר נכון המשחק שלי.

חדש:

64 . 63 . 62 . 61 . 60 . 59 . 58 . 57 . 56 . 55 . 54 . 53 . 52 . 51 . 50 . 49 .

קח לך שני מספרים עוקבים (7 ו 8). ושים אותם בריבוע (49 ו 64). ומאותו ריבוע האי-זוגי שבניהם

תחסר 1 (48 ו 64). תחבר שני המספרים הזוגיים (48 + 64 = 112) ותחלק אותם באחד מהפשוטים אז

תקבל פעמיים הפשוט האחר.

למשל: 7^2 ו 8^2 בריבוע 49 ו 64. (לאחר הפחות 1) לחבר $48 + 64 = 112$...

$$112 \div 7 = 16 \text{ שהם פעמיים ה } 8$$

$$112 \div 8 = 14 \text{ שהם פעמיים ה } 7$$

$$112 = 2 \times 7 \times 8$$

$$64 - 49 = 15 = 7 + 8 \text{ זה מה שתמיד הכרנו. והחידוש הוא..}$$

$$64 + 49 \dots = 112 = 2 \times 7 \times 8 \text{ (פחות 1)}$$

בלחשב: משחק יפה! לולא ההקדמה, היינו חושבים כי זה פלא מסתורי.

חבוב: אבל, לאחר שסבא גילה איך להגיע לסך הקצוות ולסך המרווחים, דרך הלוח. הוא סלל לעצמו דרך אחרת גם בעזרת ה 28 שבלוח. אבל !!! ידע כי יש מקרים בודדים הנופלים בידו. נקראים "נסיונות החיים", בעולם המספרי ומי שאינו עומד בניסיון לבסוף יגלה שטעה. בלחשב: על מה אתה מדבר? חבוב: סבא חשב שעלה על מציאה... $28^2 = 784$ ומה עשה סבא? הוסיף למספר הזה +7. נמצא $784 + 7 = 791$. זה ממש מה שהגענו אליו.

	C ₀	C ₁	x ²	=	C ₁	C ₂		=	C ₂	C ₃
L ₇	1	7	7 ²	49	7	21	1+(21x4)	6x85	510	21 35
L ₈	1	8	8 ²	64	8	28	1+(28x4)	7x113	791	28 56

אמנם סך הקצוות אין כאן, אבל סך המרווח, נמצא כאן! יוסילה: זה ממש דרך קצרה לגלות המרווחים. חבוב: טעות לומר "לגלות המרווחים" אלא "לגלות המרווח שבין 7² ו 8²". אם תבדוק בכל המקרים האחרים, מעולם לא תגיע בדרך זו! נעבור לדוגמה אחרת

. 36 . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49 .

במילים אחרות, $85 = 49 + 36$ אינו אלא $6 \times 7 \times 2$ ועוד 1

	C ₀	C ₁	x ²	=	C ₁	C ₂		=	C ₂	C ₃
L ₀	1	0	0 ²	0	0					
L ₁	1	1	1 ²	1	1			0		
L ₂	1	2	2 ²	4	2	1	1+(1x4)	1x5	5	1
L ₃	1	3	3 ²	9	3	3	1+(3x4)	2x13	26	3 1
L ₄	1	4	4 ²	16	4	6	1+(6x4)	3x25	75	6 4
L ₅	1	5	5 ²	25	5	10	1+(10x4)	4x41	164	10 10
L ₆	1	6	6 ²	36	6	15	1+(15x4)	5x61	305	15 20
L ₇	1	7	7 ²	49	7	21	1+(21x4)	6x85	510	21 35
L ₈	1	8	8 ²	64	8	28	1+(28x4)	7x113	791	28 56
L ₉	1	9	9 ²	81	9	36	1+(36x4)	8x145	1160	36 84

$6 \times 7 \times 2 = 84$ ועוד 1 ועוד 21×4 ועוד 1

הסך לזוג מספרים במרווח מ 36 ועד 49.

$37 + 48 = 85$ שאינו אלא $6 \times 7 \times 2$ ועוד 1 שאינו אלא 21×4 ועוד 1
 $38 + 47 = 85$ שאינו אלא $6 \times 7 \times 2$ ועוד 1 שאינו אלא 21×4 ועוד 1
 $39 + 46 = 85$ שאינו אלא $6 \times 7 \times 2$ ועוד 1 שאינו אלא 21×4 ועוד 1
 $40 + 45 = 85$ שאינו אלא $6 \times 7 \times 2$ ועוד 1 שאינו אלא 21×4 ועוד 1
 $41 + 44 = 85$ שאינו אלא $6 \times 7 \times 2$ ועוד 1 שאינו אלא 21×4 ועוד 1
 $42 + 43 = 85$ שאינו אלא $6 \times 7 \times 2$ ועוד 1 שאינו אלא 21×4 ועוד 1
 $21 =$ חצי הזוגי כפול האי-זוגי ($21 = 7 \times 3 = 7 \times 6 \times \frac{1}{2}$) ומוסיפים, כפול 4; ועוד 1.

אין זה אלא הסך לזוג אי. בלחשב: וכשנרצה לדעת סך המרווח נצטרך לפנות לשורש הקטן. ל 6 ולא ל 7. כי אנו נמצא כאן 6 זוגות.

חבוב: מובן מאליי, כי 6 זוגות מספרים נמצאים במרווח. ובל אם רוצים לכלול הקצוות. יש לכפול ב 7.

יוסילה: אם אפשר, עוד דוגמה!

לא שלא הבנתי, אלא שעוד דוגמה, תעזור!

בלחשב: גם אני. הבנתי כל מילה, ועדיין מעדיף לשמוע עוד!

חבוב: אני אתן הסבר לשורה הזו

	C ₀	C ₁	x ²	=	C ₁	C ₂			=	C ₂	C ₃
L ₅	1	5	5 ²	25	5	10	1+(10x4)	4x41	164	10	10
L ₆	1	6	6 ²	36	6	15	1+(15x4)	5x61	305	15	20

. 25 . 26 . 27 . 28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . 36 .

הדרך השיגריתית שתמיד הגענו דרכה $305 = 61 \times 5$ כי $61 = 36 + 25$

וכעת יש הצורך לתת הסבר על $5 = (1 + 15 \times 4)$

אתה זוכר מה אמרנו על שני המספרים העוקבים

כי .. $2 \times 5 = 10$ $60 = 1 + \dots$ $61 = 5 \times \dots$ $305 = 5 \times \dots$ האם זה ברור?

יוסילה: כן! את ההסבר האחרון הזה, הבנתי.

חשוב: מצאנו גילינו כי $2 \times 5 \times 6 = 60$ כי אותו 2 יכול להיפך ל 4 לכל הדרך, כי לכל שני מספרים

עוקבים, יש בהם אחד זוגי, ואנו נסתפק בחציו. $2 \times 5 \times 6 = 60$ יכול להיות מוגש גם כך

$4 \times 5 \times 3 = 60$ מסכים? ... היינו $(1 + 15 \times 4) = 61$ ולקבל הסך למרווח הפנימי, כופלים ב 5.

$5 = (1 + 15 \times 4) \times 305$

בלחשב: תודה על הסבלנות ללכת בהסבר עד הסוף.

חשוב: חושבני שדברנו מספיק על הריבועים, האם ברצונכם להכיר מקרוב, אותם שבחזקת 3?

בלחשב: אותי זה מעניין רק בשביל שאתה מעביר אלינו הדברים כמו שהתפתחו עם סבא.

יוסילה: וגם אני, סקרן לדעת הגישה... שבה ניגש סבא לעניין?

חשוב: בלחשב, אתה זוכר שאמרת: הסבא שלי יש לו חוש מסוים, שלפני שיצא לחיפוש הוא

בטוח למה יש לצפות. אכן מה לפי דעתך סבא ציפה למצוא בדרכו (לגשת לצרווחים בלוקט 3)?

בלחשב: מעניין שאתה מעורר הפרט הזה, אכן מה באמת ציפה סבא לגלות?

חשוב: ציפה למצוא בדרכו, העמודה-2 המשתתפת בהרכבת המרווחים בין 1 ל 8 ל 27 ל 64 ל..

יוסילה: אכן הגיע?

חשוב: את זה נראה בהמשך ההסבר. עתה תנו לי להגיש

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16 . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 . 25 . 26

. 27 . 28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . 36 . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49

. 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56 . 57 . 58 . 59 . 60 . 61 . 62 . 63 . 64 . 65 . 66 . 67 . 68 . 69 . 70 . 71 . 72

. 73 . 74 . 75 . 76 . 77 . 78 . 79 . 80 . 81 . 82 . 83 . 84 . 85 . 86 . 87 . 88 . 89 . 90 . 91 . 92 . 93 . 94 . 95

. 96 . 97 . 98 . 99 . 100 . 101 . 102 . 103 . 104 . 105 . 106 . 107 . 108 . 109 . 110 . 111 . 112 . 113 .

114 . 115 . 116 . 117 . 118 . 119 . 120 . 121 . 122 . 123 . 124 . 125.

לידיעתך יוסילה, גם כאן יש הזוגי והאי-זוגי... 1, 8, 27, 64, 125, ...

וזה מחייב שיהיה לנו כמות המספרים שבמרווח, מתחלקת ב 2.

למשל, בין 64 ל 125 יש 60 מספרים. המספר 60 הוא מספר זוגי.

יוסילה: ברור! כנראה שאין בפרט זה, משהו שונה ממה שמצאנו בריבועים.

חשוב: האם אתה יודע הסיבה מדוע אחד זוגי ואחד אי-זוגי?

יוסילה: איזו סיבה... כך יצא!

חשוב: לא כן! אלא הסיבה כי הריבוע של הזוגי זוגי, וכן מספר זוגי בחזקת 3, זוגי. וכן אצל האי-

זוגי. והיות וכל המספרים הם 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... אחד זוגי ושלאחריו אי-זוגי, אכן הן לריבוע

הן למה שבחזקת 3 מגיעים באותו הלבוש! $2 \times 2 \times 2$ אפילו נכפלים 1000 פעמים, זה ישאר זוגי.

וכעת אני פונה לבלחשב, אתה זוכר מה סבא לימד אותך... הרי פעם סיפרת לנו: סבא תמיד

לימד אותי לבדוק במה שלרשותי.

וכעת אני אתן לך פרטים, ואתה תעזר במה שברשותך לגלות לנו איך ניתן להגיע לאלו הפרטים.

בלחשב: בבקשה!

חשוב: דע כי..

מ 2^3 ועד 2^3 או במילים אחרות מ 1 ועד 8 יש מרווח של 6 מספרים (פנימיים).

מ 2^3 ועד 3^3 או במילים אחרות מ 8 ועד 27 יש מרווח של 18 מספרים (פנימיים).

מ 3^3 ועד 4^3 או במילים אחרות מ 27 ועד 64 יש מרווח של 36 מספרים (פנימיים).

מ 4^3 ועד 5^3 או במילים אחרות מ 64 ועד 125 יש מרווח של 60 מספרים (פנימיים).
 כאשר לרשותך 1 ו 2 או אם תרצה 1 ו 8 איך אתה מגיע ל 6 מספרים במרווח?
 וכאשר לרשותך 2 ו 3 או אם תרצה 8 ו 27 איך אתה מגיע ל 18 מספרים במרווח?
 וכאשר לרשותך 3 ו 4 או אם תרצה 27 ו 64 איך אתה מגיע ל 36 מספרים במרווח?
 וכאשר לרשותך 4 ו 5 או אם תרצה 64 ו 125 איך אתה מגיע ל 60 מספרים במרווח?
 יוסילה: צריך לחשוב... אגיד לך את האמת. כשאני מסתכל על 3^3 ו 4^3 שהם 27 ו 64 אני רואה שום 36...

חבוב: אני אגיד לך ... סבא חשב כך. לרשותי 27 ולרשותי 64 ואני צריך להגיע ל 36...
 אז בוא ונחסר זה מזה... ונראה מה נשאר. $3^3 - 4^3 = 27 - 64 = -37$ הנה אנו ממש קרובים ל 36.
 אולי צריך רק לעשות "פחות 1"

$$\begin{aligned} 6 &= 1 - 7 & 7 &= 1 - 8 \\ 18 &= 1 - 19 & 19 &= 8 - 27 \\ 36 &= 1 - 37 & 37 &= 27 - 64 \\ 60 &= 1 - 61 & 61 &= 64 - 125 \end{aligned}$$

הנה יש לכם גם האפשרות איך להגיע... ונוסף לכך אנו מקבלים עמודה-2.
 יוסילה: מה אתה סח! איזה עמודה-2?
 חבוב:

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃
L ₀	1	0		
L ₁	1	1		
L ₂	1	2	1	
L ₃	1	3	3	1
L ₄	1	4	6	4
L ₅	1	5	10	10
L ₆	1	6	15	20

האין $6 \times 1 = 6$

האין $6 \times 3 = 18$

האין $6 \times 6 = 36$

האין $6 \times 10 = 60$

האין 1, 3, 6, 10, ... היא עצמה העמודה-2?

יוסילה: כן! מה שנכון, נכון!

חבוב: זה מה שנראה לנו כעת. אך לאמתו של דבר, כך יש להגיש אותם הבדלים:

$$2 \times (3 \times 1) = 6$$

$$2 \times (3 \times 3) = 18$$

$$2 \times (3 \times 6) = 36$$

$$2 \times (3 \times 10) = 60$$

יוסילה: האם זה משנה, כך או כך?

חבוב: ניקח למשל, מ 6^3 עד 7^3 . כלומר, מ 216 עד 343.

כמה מספרים נמצאים במרווח שלהם?

$$127 = 343 - 216 \quad 126 = 1 - 127 \quad (\text{מספר זוגי})$$

$$2 \times (3 \times 21) = 126 \quad \text{חציים } 63 = 2 \div 126 \quad \text{שהוא } 21 \times 3$$

זוגות מספרים אלו (63) , יש לכפול אותם בסך הקצוות. $(7^3 + 6^3)$.

$$559 = 343 + 216 \quad (\text{שאותו יש לכפול בכמות זוגות המספרים})$$

אך יש לברר, ממה מורכב המספר הזה 559 שהוא סך לכל זוג, כולל סך הקצוות?

$$43 \times 13 = 559$$

$$[1 + (7 \times 6)] (7 + 6) = 559 \quad \text{במילים אחרות}$$

כלומר, מתוך השאלה, כמה זה מ 6^3 עד 7^3 ? יש להיעזר ב 6 ו 7 להגיע ל 559.
 יוסילה: רגע! אתה אומר כי אם עלינו למצוא סך הקצוות בין 6^3 ל 7^3 יש להסתפק בשתי הספרות 6 ו 7 לתת התשובה?

חשוב: בדיוק כך! $(6 + 7) [(7 \times 6) + 1] = 559$ שהם הם $559 = 343 + 216$
 יוסילה: מאוד מעניין... ובוודאי, סבא מקשר כל זה עם הלוח!
 חבוב בוודאי! הנה, אתה יכול לראות בעצמך!

משמאל לימין.

	C ₀	C ₁	C ₁	C ₂	מספרים במרווח		שהם	זוגות	סך הקצוות	שהם
L ₀	1	0	0							
L ₁	1	1	1 ³							
L ₂	1	2	2 ³	1	מ 1^3 עד 2^3 (1x6)	6	$2^3 - 1^3 - 1$	3	$(1 + 2) [(1 \times 2) + 1]$	9 3 x 9
L ₃	1	3	3 ³	3	מ 2^3 עד 3^3 (3x6)	18	$3^3 - 2^3 - 1$	9	$(2 + 3) [(2 \times 3) + 1]$	35 9 x 35
L ₄	1	4	4 ³	6	מ 3^3 עד 4^3 (6x6)	36	$4^3 - 3^3 - 1$	18	$(3 + 4) [(3 \times 4) + 1]$	91 18 x 91
L ₅	1	5	5 ³	10	מ 4^3 עד 5^3 (10x6)	60	$5^3 - 4^3 - 1$	30	$(4 + 5) [(4 \times 5) + 1]$	189 30 x 189
L ₆	1	6	6 ³	15	מ 5^3 עד 6^3 (15x6)	90	$6^3 - 5^3 - 1$	45	$(5 + 6) [(5 \times 6) + 1]$	341 45 x 341
L ₇	1	7	7 ³	21	מ 6^3 עד 7^3 (21x6)	126	$7^3 - 6^3 - 1$	63	$(6 + 7) [(6 \times 7) + 1]$	559 63 x 559
L ₈	1	8	8 ³	28	מ 7^3 עד 8^3 (28x6)	168	$8^3 - 7^3 - 1$	84	$(7 + 8) [(7 \times 8) + 1]$	855 84 x 855
L ₉	1	9	9 ³	36	מ 8^3 עד 9^3 (36x6)	216	$9^3 - 8^3 - 1$	108	$(8 + 9) [(8 \times 9) + 1]$	1241 108 x 1241

בלחשב: עד עכשיו יש לנו שתי שיטות למצוא סך הקצוות. או לחבר שני הקצוות או לפי השיטה שבלוח.

יוסילה: יש להאמין כי סבא היו לו עוד שיטות!

בלחשב: האי-זוגי שראינו במרווחים הפשוטים ובריבועים, האם אינם קיימים כאן?

חבוב: למעשה, זה אותו דבר!

ואני אסביר לכם איך זה!

$$(6 + 7) [(6 \times 7) + 1] \quad 559$$

הוא עצמו

$$13 \times 43 \quad 559$$

	C ₀	C ₁	C ₁	C ₂	מספרים במרווח		שהם	זוגות	סך הקצוות	
L ₀	1	0	0							
L ₁	1	1	1 ³							
L ₂	1	2	2 ³	1	מ 1^3 עד 2^3 (1x6)	6	$2^3 - 1^3 - 1$	3	$(1 + 2) [(1 \times 2) + 1]$	3 x 3 9
L ₃	1	3	3 ³	3	מ 2^3 עד 3^3 (3x6)	18	$3^3 - 2^3 - 1$	9	$(2 + 3) [(2 \times 3) + 1]$	5 x 7 35
L ₄	1	4	4 ³	6	מ 3^3 עד 4^3 (6x6)	36	$4^3 - 3^3 - 1$	18	$(3 + 4) [(3 \times 4) + 1]$	7 x 13 91
L ₅	1	5	5 ³	10	מ 4^3 עד 5^3 (10x6)	60	$5^3 - 4^3 - 1$	30	$(4 + 5) [(4 \times 5) + 1]$	9 x 21 189
L ₆	1	6	6 ³	15	מ 5^3 עד 6^3 (15x6)	90	$6^3 - 5^3 - 1$	45	$(5 + 6) [(5 \times 6) + 1]$	11 x 31 341
L ₇	1	7	7 ³	21	מ 6^3 עד 7^3 (21x6)	126	$7^3 - 6^3 - 1$	63	$(6 + 7) [(6 \times 7) + 1]$	13 x 43 559
L ₈	1	8	8 ³	28	מ 7^3 עד 8^3 (28x6)	168	$8^3 - 7^3 - 1$	84	$(7 + 8) [(7 \times 8) + 1]$	15 x 57 855
L ₉	1	9	9 ³	36	מ 8^3 עד 9^3 (36x6)	216	$9^3 - 8^3 - 1$	108	$(8 + 9) [(8 \times 9) + 1]$	17 x 73 1241

יוסילה: עבודה טובה תודה רבה לך ולסבא.

בלחשב: היום ראינו הרבה פרטים, שמעולם לא היינו זוכים להם!

יוסילה: והכל בפשטות, אין כאן נוסיות מסובכות.

חבוב : אכן יש לסכם

	C ₀	C ₁	C ₂			המספרים במרווח	חציים זוגות
L ₀	1						
L ₁	1	1					
L ₂	1	2	1	מרווח 1 ³ → 2 ³	מ 1 → 8	1 x 6	6
L ₃	1	3	3	מרווח 2 ³ → 3 ³	מ 8 → 27	3 x 6	18
L ₄	1	4	6	מרווח 3 ³ → 4 ³	מ 27 → 64	6 x 6	36
L ₅	1	5	10	מרווח 4 ³ → 5 ³	מ 64 → 125	10 x 6	60
L ₆	1	6	15	מרווח 5 ³ → 6 ³	מ 125 → 216	15 x 6	90
L ₇	1	7	21	מרווח 6 ³ → 7 ³	מ 216 → 343	21 x 6	126
L ₈	1	8	28	מרווח 7 ³ → 8 ³	מ 343 → 512	28 x 6	168
L ₉	1	9	36				

אתם מבחינים ב 6 איך משחק תפקיד כאן???

וכעת סגירת מעגל, ושלוש על ישראל.

אתם בוודאי זוכרים את המדובר אודות ה 6 ... שהכניסה את סבא לעולם המרווחים?

1 ²	(1 x 2 x 03)/6	=	1
1 ² + 2 ²	(2 x 3 x 05)/6	=	5
1 ² + 2 ² + 3 ²	(3 x 4 x 07)/6	=	14
1 ² + 2 ² + 3 ² + 4 ²	(4 x 5 x 09)/6	=	30
1 ² + 2 ² + 3 ² + 4 ² + 5 ²	(5 x 6 x 11)/6	=	55
1 ² + 2 ² + 3 ² + 4 ² + 5 ² + 6 ²	(6 x 7 x 13)/6	=	91
1 ² + 2 ² + 3 ² + 4 ² + 5 ² + 6 ² + 7 ²	(7 x 8 x 15)/6	=	140
1 ² + 2 ² + 3 ² + 4 ² + 5 ² + 6 ² + 7 ² + 8 ²	(8 x 9 x 17)/6	=	204
.... + 9 ²	(9 x 10 x 19)/6	=	285
.... + 10 ²	(10 x 11 x 21)/6	=	385

כאן סיימתי. ממש סיימתי... והנה תוכלו לקחת איתכם איזה דפים למזכרת... ואתם לבד תגלו

מה שיש באלו הדפים... הכל מעבודות סבא!

יוסילה: פונה לבלחשב אתה זוכר הביקור אצל ראשונית, אתה זוכר 6 + 1 - 1 ?

חבוב: כן! גם אני זכיתי להכיר בפולחן הזה. כאשר הגיעה ראשונית להראות לסבא את הפולחן

שלה, אני הייתי באותו זמן בבית אצל סבא, ואני עד לכל מה שהתרחש באותו זמן. ויודע בדיוק

מה שסבא מסר לה...

היא אמרה לסבא, 6 - 1 = מספר ראשוני ; 6 + 1 = מספר ראשוני.

6 - 1 = מספר ראשוני ; 6 + 1 = מספר ראשוני.

6*2 - 1 = מספר ראשוני ; 6*2 + 1 = מספר ראשוני.

6*3 - 1 = מספר ראשוני ; 6*3 + 1 = מספר ראשוני. וכו'

נחזור למרווחים שלנו.

בלחשב: ולא עוד אלא שכאן אתה צריך לעשות 1- לפני החלוקה ב 6.

L ₅	1	5	10	מרווח 4 ³ → 5 ³	מ 64 → 125	10 x 6	60	125 - 64 = 61	- 1	60 ÷ 6 = 10
L ₆	1	6	15	מרווח 5 ³ → 6 ³	מ 125 → 216	15 x 6	90	216 - 125 = 91	- 1	90 ÷ 6 = 15
L ₇	1	7	21	מרווח 6 ³ → 7 ³	מ 216 → 343	21 x 6	126	343 - 216 = 127	- 1	126 ÷ 6 = 21
L ₈	1	8	28	מרווח 7 ³ → 8 ³	מ 343 → 512	28 x 6	168	512 - 343 = 169	- 1	168 ÷ 6 = 28

יוסילה: עולם המספרים יש לו המשענות שלו ...

הם טמירים וגנוזים ולא כל כך פשוט להגיע אל חקר !

חבוב:

והנה טבלה מסבא בה מגיש כל שלב בפני עצמו.

C ₁	C ₂	C ₁	C ₂	C ₁	C ₂	C ₁	C ₂	C ₁	C ₂	C ₁	C ₂	C ₁	C ₂	C ₁	C ₂	C ₁	C ₂
1 ³		1 ³		1 ³		1 ³		1 ³		1 ³		1 ³		1 ³		1 ³	
2 ³	1	2 ³	1	2 ³	1	2 ³	1	2 ³	1	2 ³	1	2 ³	1	2 ³	1	2 ³	1
3 ³	3	3 ³	3	3 ³	3	3 ³	3	3 ³	3	3 ³	3	3 ³	3	3 ³	3	3 ³	3
4 ³	6	4 ³	6	4 ³	6	4 ³	6	4 ³	6	4 ³	6	4 ³	6	4 ³	6	4 ³	6
5 ³	10	5 ³	10	5 ³	10	5 ³	10	5 ³	10	5 ³	10	5 ³	10	5 ³	10	5 ³	10
6 ³	15	6 ³	15	6 ³	15	6 ³	15	6 ³	15	6 ³	15	6 ³	15	6 ³	15	6 ³	15
7 ³	21	7 ³	21	7 ³	21	7 ³	21	7 ³	21	7 ³	21	7 ³	21	7 ³	21	7 ³	21
8 ³	28	8 ³	28	8 ³	28	8 ³	28	8 ³	28	8 ³	28	8 ³	28	8 ³	28	8 ³	28
9 ³	36	9 ³	36	9 ³	36	9 ³	36	9 ³	36	9 ³	36	9 ³	36	9 ³	36	9 ³	36
10 ³	45	10 ³	45	10 ³	45	10 ³	45	10 ³	45	10 ³	45	10 ³	45	10 ³	45	10 ³	45
1 ³ ➔ 2 ³ 6 x 1		2 ³ ➔ 3 ³ 6 x 3		3 ³ ➔ 4 ³ 6 x 6		4 ³ ➔ 5 ³ 6 x 10		5 ³ ➔ 6 ³ 6 x 15		6 ³ ➔ 7 ³ 6 x 21		7 ³ ➔ 8 ³ 6 x 28		8 ³ ➔ 9 ³ 6 x 36		9 ³ ➔ 10 ³ 6 x 45	
3 (1 x 2)		3 (2 x 3)		3 (3 x 4)		3 (4 x 5)		3 (5 x 6)		3 (6 x 7)		3 (7 x 8)		3 (8 x 9)		3 (9 x 10)	

בלחשב : אני רואה עליך העייפות. האם התעייפת?

חבוב : את האמת, כן! אני מעדיף שתבואו מחר לבקר אותי... גם אם לא יהיה לי הרבה מה להוסיף... אבל אני מבטיח לכם חזרה על החומר במילים אחרות ובטבלאות אחרות... סבא אומר, כי זו היא השיטה הגורמת שהלימודים יתאמתו אצל האדם.

יוסילה : אני שמעתי כי מתאמתים סיפורים אצל האדם, כאשר יש מקורות שונים מספרים אותו סיפור... בלחשב : גם הדברים הידועים מזמן אצל האדם, כאשר שומע אותם מאותם האמורים להיות מחוץ למסגרת... גם הדברים הידועים מתאמתים!

יוסילה : האם אתה יכול לתת הסבר ברור?

בלחשב : בוודאי! דבר הידוע לך מהמדינה שלך, ואם אתה מבקר באמריקה, ואתה שומע שאמריקאי מאשר אותו דבר... בוודאי שאותו דבר מתאמת אצלך.

חבוב : אז נתראה מחר ובוודאי מספר דברים שהיום נודעו לכם, יש סיכויים שמחר יתאמתו אצלכם, ויהיו חלק מהמובן מאליו כשמדברים בהם.

ובזה נפרדו בשלום מחבוב עם הודיות רבות. ושבו הביתה.