

קוראים לו

יוסילה מתמטיקה.

ברוכים הבאים לעולם
"החשבון לא חשבון"

לפנינו ספור אודות נער שמצא עצמו על אי בודד. ובסופו של דבר
גילה כי בקצה האי היא קיימת איזה עיירה, אלא שאנשיה
קצת מוזרים.
ושם פגש במשפחה שאכסנה אותו להיות כאחד מהם.



אנו נהיה עדים לכל מה שעבר עליו בעיר ההיא.
ונראה מקרוב הפלאי-פלאים שבחשבון ללא חשבון
שנתגלו לו בחיותו ביניהם.



הקדמה אודות "החשבון ללא חשבון"

כשאומרים "חשבון ללא חשבון" אין הכוונה שאין כאן חשבון כלל, אלא המדובר אודות פעולת חשבון כה זעירה עד שילד קטן יכול לתת תשובה לפעולת חשבון כזו. ניקח למשל לוח הכפל של "99" ונראה ביחד כמה זמן ומאמצים אתה צריך להשקיע?

$$\text{למשל: } 4356 \div 99 = ?$$

בבקשה תיגש למהלכי ה"חשבון" שאתה מכיר ורגיל! ...
סיימת?

האתגר שבדף זה:

לחת לילד קטן לפתור לנו הפעולה " $4356 \div 99 = ?$ "

⬅ תוך שניה אחת, בבקשה!

וכעת, בא ונפתור אותו תרגיל "בחשבון ללא חשבון"

אני מסתכל על המספר "4356"

כן מסתכל כך! "4356"

וכל מה שיש לעשות הוא להוסיף "ועוד אחד"

אני חושב, כי אפילו ילד קטן יכול לפתור לנו תרגיל מסובך זה.

$$4356 \div 99 = 44$$

פרק ח'

היום מבקרים אצל ספרון!

דו שיח בין בלחשב ויוסילה.

בלחשב: היום אני לוקח אותך לבקר אצל ספרון, הוא מטפל במספרים ובפעולות בהחלפת

ספרה פה וספרה שם....

יוסילה: מעניין! אז לדרך...

בדרך בלחשב מספר על ספרון... שכעת הוא מחפש לפתור הריבועים לכל המספרים. לזה הוא חילק המספרים לקבוצות, ולכל קבוצת מספרים, מתייחס אליה כעולם בפני עצמו. הוא יודע כי יגלה בלעדיות כל שהיא, שעליה יוכל לפתח הפולחן שלו.

ספרון: תכנסו! ברוכים הבאים.

בלחשב: אתה עוד עוסק בריבועים?

ספרון: גם עלה בידי לעשות קבוצות חדשות...

האם אתה זוכר בלחשב, בפעם האחרונה כשהיית אצלי, מצאת אותי עוסק בריבועים שבתחום העשרות. 10, 20, 30, ...

בלחשב: כן אתה סיפרת לי כי המספרים 10, 20, 30, ... עם 1+ או עם 1- ניתן למצוא הריבוע שלהם בשיטה ללא חשבון.

יוסילה: על איזה מספרים אתם מדברים?

ספרון: הכוונה על אלו.

$11^2, 21^2, 31^2, 41^2, 51^2, 61^2, 71^2, 81^2, 91^2, \dots$

$19^2, 29^2, 39^2, 49^2, 59^2, 69^2, 79^2, 89^2, 99^2, \dots$

וכן אלו המסתיימים ב 5

$15^2, 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, 65^2, 75^2, 85^2, 95^2, \dots$

בלחשב: מלבד אלו הקבוצות, מצאת לך קבוצות אחרות.

ספרון: כן! מה דעתך על הקבוצות האלו?

$51^2, 52^2, 53^2, 54^2, 55^2, 56^2, 57^2, 58^2, 59^2, \dots$

$101^2, 102^2, 103^2, 104^2, 105^2, 106^2, 107^2, 108^2, 109^2, \dots$

$41^2, 42^2, 43^2, 44^2, 45^2, 46^2, 47^2, 48^2, 49^2, \dots$

$91^2, 92^2, 93^2, 94^2, 95^2, 96^2, 97^2, 98^2, 99^2, \dots$

אתם לא תחזרו הביתה מבלי להכיר מקרוב דברים שהיו בשבילכם באופן הרחוק.

בלחשב: אני שמח כי יוסילה שהגיע אלינו מהעולם הגדול, יכול למצוא אצלנו די סיפוקו.

ספרון: קודם כל, נתחיל בהכרת הפשוטות מקרוב יותר

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, \dots$

וכמובן מכאן יש לפנות ל

$10^2, 20^2, 30^2, 40^2, 50^2, 60^2, 70^2, 80^2, 90^2, \dots$

אנו אפילו נראה קצת כפלים כעין אלו...

$40 \times 79; 40 \times 71; 40 \times 75; \dots$

סבלנות... יש מה לראות.

יוסילה: מה יש לראות בפשוטות? $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, \dots$

ספרון: שום דבר מיוחד רק להבחין באופי שלהם.

לזכור כי האופי שאתה מגלה כאן, הוא מה שתמצא בכל ריבוע. כאן יש לנו שתי קבוצות

קבוצת הפחותים מ 5. שהם $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2$

וקבוצת הגדולים מ 5. שהם $5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2$

* נמצא כי לכל הריבועים שבעולם, אנו נקבל באחדות **אך ורק** 1, 4, 6, 9. חוץ מ 0 ו 5 כמובן.

$1^2 = 1$	$9^2 = 81$
$2^2 = 4$	$8^2 = 64$
$3^2 = 9$	$7^2 = 49$
$4^2 = 16$	$6^2 = 36$
אתה רואה הצד השווה * נמצא כי לכל הריבועים שבעולם, אנו נקבל באחדות 1, 4, 6, 9. חוץ מ 0 ו 5 כמובן.	

יוסילה : אתה צודק... אין להתעלם מכאלו פרטים.
ספרון : באותה הזדמנות יש לפקוד את אלו.

$10^2 = 1\ 00$	$60^2 = 36\ 00$
$20^2 = 4\ 00$	$70^2 = 49\ 00$
$30^2 = 9\ 00$	$80^2 = 64\ 00$
$40^2 = 16\ 00$	$90^2 = 81\ 00$
$50^2 = 25\ 00$	$100^2 = 100\ 00$
ימין = 00.	
שמאל = עשרות בריבוע.	

יוסילה : גם זה ... טוב לדעת כי כן הוא !
בלחשב : יוסילה! ספרון, הוא לוקח בחשבון כל מה שידוע כמו מה שלא ידוע... העיקר, כי הגשת
החומר תהיה בשלמותה.
ספרון : והנה החביב לכולנו.

$05^2 = 0\ 25$	$55^2 = 30\ 25$
$15^2 = 2\ 25$	$65^2 = 42\ 25$
$25^2 = 6\ 25$	$75^2 = 56\ 25$
$35^2 = 12\ 25$	$85^2 = 72\ 25$
$45^2 = 20\ 25$	$95^2 = 90\ 25$
ימין = 25.	
שמאל = עשרות כפול (עשרות+1) 1+ ביאורו המספר שבא אחריו.	

בלחשב : את זה, כבר מסרתי ליוסילה.
ספרון : האם אני מתקדם יותר מדי מהר בשבילך?
יוסילה : עד עכשיו זה בסדר... זה לא ממש חומר חדש.
ספרון : אכן אולי זה חדש בשבילך?

מקרה-1 העשרות > 5	מקרה-2 העשרות ≤ 5
$01^2 = 0\ 01$	$51^2 = 26\ 01$
$11^2 = 1\ 21$	$61^2 = 37\ 21$
$21^2 = 4\ 41$	$71^2 = 50\ 41$
$31^2 = 9\ 61$	$81^2 = 65\ 61$
$41^2 = 16\ 81$	$91^2 = 82\ 81$
צד ימין המכפלה, כלול מאחדות ועשרות. ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו.	
צד ימין המכפלה, כלול מאחדות ועשרות. האחדות כאן, תמיד $= 1$ העשרות למקרה-1 = פעמיים העשרות. העשרות למקרה-2 = פעמיים (העשרות - 5) ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו. במקרה-1 = העשרות בריבוע. במקרה-2 = העשרות בריבוע+1.	

יוסילה : אלו הדברים הם רק תוצרת האי שלכם... בעולם הגדול לא מכירים בסדורים כאלו.

ספרון : תראה איך זה...

$$\ll 31^2 = 961 \gg$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 31 \\ \hline 31 \\ 93 \\ \hline 961 \end{array}$$

צד ימין : העשרות במקרה-1 = פעמיים העשרות.
צד שמאל : במקרה-1 = העשרות בריבוע.

$$\ll 81^2 = 6561 \gg$$

$$\begin{array}{r} 81 \\ \times 81 \\ \hline 81 \\ 648 \\ \hline 6561 \end{array}$$

צד ימין : העשרות במקרה-2 = פעמיים (העשרות – 5)
שהם פעמיים (8 פחות 5) = 3
לאמתו של דבר, אמור להיות = פעמיים העשרות, פחות 10.
שהם פעמיים 8 = 16, ואז פחות 10 = 6
צד שמאל : במקרה-2 = העשרות בריבוע+1.

יוסילה : מובן... ההסבר שלך די ברור.
ספרון : בסדר נמשיך הלאה...

מקרה-1 העשרות > 5	מקרה-2 העשרות ≤ 5
$09^2 = 081$	$59^2 = 3481$
$19^2 = 361$	$69^2 = 4761$
$29^2 = 841$	$79^2 = 6241$
$39^2 = 1521$	$89^2 = 7921$
$49^2 = 2401$	$99^2 = 9801$
צד ימין המכפלה, כלול מאחדות ועשרות. ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו.	
צד ימין המכפלה, כלול מאחדות ועשרות. האחדות כאן, תמיד $1 =$ העשרות במקרה-1 = 8 פחות פעמיים העשרות. העשרות במקרה-2 = 18 פחות פעמיים העשרות. ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו. לעגל, ולמצוא הריבוע (ולחסר) במקרה-1 = העשרות+1, בריבוע, פחות 1. במקרה-2 = העשרות+1, בריבוע, פחות 2.	

יוסילה : זה לא כל כך מובן מאליו. אבל בדרך שאתה מגיש את זה, נראה כאילו "ללא חשבון".
ספרון : תראה איך זה...

$$\ll 39^2 = 1521 \gg$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times 39 \\ \hline 351 \\ 117 \\ \hline 1521 \end{array}$$

צד ימין : העשרות במקרה-1 = 8 פחות, פעמיים העשרות.
צד שמאל : במקרה-1 = העשרות (ועוד 1), בריבוע. ואחר כך, פחות 1.

$$\ll 89^2 = 7921 \gg$$

89
x 89
801
712
7921

צד ימין : העשרות במקרה-2 = 18 פחות, פעמיים העשרות.

צד שמאל : במקרה-2 = העשרות (ועוד 1), בריבוע. ואחר כך, פחות 2.

בלחשב : שואל את יוסילה האם אתה יודע מה עניין 8 ו 18 שבעשרות?

יוסילה : לא באמת, אתה יכול לחזור על זה... מעניין להכיר ברורות מה זה?

בלחשב : פונה לספרון ברשותך ספרון! תן לי להסביר לו עניין ה 8 ו 18 של העשרות ב 9.

ספרון : בבקשה, רק מבלי להרחיק לכת.

בלחשב : $1131 = 29 \times 39$ אנו מוצאים כי סך שלושת העשרות = 8

$3081 = 79 \times 39$ אנו מוצאים כי סך שלושת העשרות = 18

כל עוד וסך העשרות (של ה 9 שבאחדות) מגיע ל 8, סך שלושת העשרות = 8

אבל כאשר סך העשרות של הכפל עולה על 8, אז שלושת העשרות = 18

מקרה-1 $0081 = 09 \times 09$; $2301 = 59 \times 39$

מקרה-2 $2891 = 59 \times 49$; $9801 = 99 \times 99$

לאחר הסבר זה, הרי בריבוע, שני המספרים שבעשרות הן זהים.

כלומר 39^2 כאילו 39×39 . לכן במקום לשקול בדרך השגרתית, "האם פעמים העשרות מגיע ל

8, או ל יותר מ 8?" אנו שוקלים כך! "האם עשרות המספר מגיע ל 4 או יותר מ 4?"

כלומר כאשר יש לנו 49^2 אנו כבר בקצה מקרה-1. $2401 = 49^2$.

וכאשר יש לנו 59^2 או יותר, אנו כבר במקרה-2. $3481 = 59^2$.

יוסילה : תודה...

ספרון : כעת אני ממשיך במה שמוכן אצלי.

$50^2 = 2500$	$55^2 = 3025$
$51^2 = 2601$	$56^2 = 3136$
$52^2 = 2704$	$57^2 = 3249$
$53^2 = 2809$	$58^2 = 3364$
$54^2 = 2916$	$59^2 = 3481$
צד ימין המכפלה, כלול מריבוע.	
ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו.	
צד ימין המכפלה, כלול מריבוע.	
צד ימין = ריבוע האחדות.	
ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו.	
25 + האחדות.	

אכן, איך למצוא 53^2 ?

יוסילה : צד ימין = 9

בלחשב : מוטב שמתחילת הדרך תוסיף האפס. צד ימין = 09

יוסילה : כן... באמת חשבתי על כך, אלא הדבר לא תפס כל כך מקום עד להתחשב בו.

צד שמאל = $25 + 3 = 28$ וביחד... $2809 = 53^2$

בלחשב : את הקבוצה הזו לא היראת לי...

ספרון : לזה התכוונת, כשאמרתי לך, שעלו בידי קבוצות חדשות. אתה שם לב, כמעט ללא

חשבון.

יוסילה : מעניין איך מורכב צד שמאל. 25 + האחדות... מעניין!

ספרון : וצד ימין, שיצא לנו "ריבוע האחדות" האין זה "מעניין"?

יוסילה : אתה צודק..

ספרון : אני אגיד לך, איך גיליתי תופעה זו.

$50^2 = 25\ 00$		$55^2 = 30\ 25$	$55 - 30 = 25$
$51^2 = 26\ 01$	$51 - 26 = 25$	$56^2 = 31\ 36$	$56 - 31 = 25$
$52^2 = 27\ 04$	$52 - 27 = 25$	$57^2 = 32\ 49$	$57 - 32 = 25$
$53^2 = 28\ 09$	$53 - 28 = 25$	$58^2 = 33\ 64$	$58 - 33 = 25$
$54^2 = 29\ 16$	$54 - 29 = 25$	$59^2 = 34\ 81$	$59 - 34 = 25$

יוסילה : הבנתי!

ספרון : אז אפשר להמשיך הלאה...

$100^2 = 100\ 00$	$105^2 = 110\ 25$
$101^2 = 102\ 01$	$106^2 = 112\ 36$
$102^2 = 104\ 04$	$107^2 = 114\ 49$
$103^2 = 106\ 09$	$108^2 = 116\ 64$
$104^2 = 108\ 16$	$109^2 = 118\ 81$
צד ימין המכפלה, כלול מריבוע. ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו.	
צד ימין המכפלה, כלול מריבוע. צד ימין = ריבוע האחדות.	
ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו. + 100 פעמיים האחדות.	
או אפשר למצוא צד שמאל לעצמו. המספר עצמו + האחדות.	

אכן איך למצוא 103^2 ?

יוסילה : צד ימין = 09 ; צד שמאל = $(3 \times 2) + 100 = 106\ 09$

וכן אפשר ... צד שמאל = $103 + 3 \leftarrow 106\ 09$

ספרון : טוב מאוד ... ועכשיו לדעת כי יש יחס הופכי למספרים שמעבר לקו ה 50 או לקו ה 100.

ואני אסביר את עצמי ... ראינו כי ב +50 וכן ב +100 ... תמיד צד ימין = ריבוע.

אנו נמצא תופעה זו גם כן אצל ה +40 שהוא למטה מ 50.

אנו נמצא תופעה זו גם כן אצל ה +90 שהוא למטה מ 100.

אלא ש... הריבוע המופיע בצד ימין אינו הריבוע של האחדות כמו שראינו, אלא הריבוע של

המשלים לאחדות. אם באחדות יש 3, צד ימין יהיה 49 (הריבוע של 7)

ואולי הכל יהיה ברור בראיית שני הלוחות הבאים.

$40^2 = 16\ 00$	$45^2 = 20\ 25$
$41^2 = 16\ 81$	$46^2 = 21\ 16$
$42^2 = 17\ 64$	$47^2 = 22\ 09$
$43^2 = 18\ 49$	$48^2 = 23\ 04$
$44^2 = 19\ 36$	$49^2 = 24\ 01$
צד ימין המכפלה, כלול מריבוע. ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו.	
צד ימין המכפלה, כלול מריבוע. צד ימין = ריבוע משלים האחדות.	
ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו. + 15 האחדות.	

כלומר, $43^2 = ?$; צד ימין = $(3 - 10)^2 = 7^2 = 49$; צד שמאל = $3 + 15 = 18$; $18\ 49 = 43^2$

ברור? הלאה

יוסילה : אני מבחין כי הקבוצה של +50 בריבוע, יש לה צד ימין "ריבוע האחדות".

אבל הקבוצה של +40 בריבוע, יש לה צד ימין "ריבוע משלים האחדות".

בלחשב : מוכרחים להגיד כי למעלה מ 50 דומים ל "א, ב, ג, ד..." ואותם, למטה מ 50 דומים ל

"ת, ש, ר, ק..."

יוסילה : תרשה לי להרחיק לכת!

ספרון : מה רצית לשאול?

יוסילה: אני מבחין כי צד שמאל של $+50 = 25 +$ האחדות. למשל $53^2 \leftarrow$ צד שמאל $3 + 25 =$ ובדומה לכך, צד שמאל של $+40 = 15 +$ האחדות. למשל $43^2 \leftarrow$ צד שמאל $3 + 15 =$ השאלה, אם נעבור ל $+30$ האם נמצא צד שמאל של $+30 = 5 +$ האחדות. ואם נעבור ל $+60$ האם נמצא צד שמאל של $+60 = 35 +$ האחדות. ספרון: בוודאי! אלא ש... יש לך עסק עם צד ימין, שאינו חשבון ללא חשבון. ואתה תקבל מספר גדול בצד ימין, שתצטרך להעביר היתרה לצד שמאל. ניקח למשל. $68^2 = 4624$. יש לראות (בשביל צד ימין) $68 = 50 + 18$. כעת, אתה צריך למצוא 18 בריבוע $= 324$ נמצא, צד שמאל 46 מורכב מ $25 + 18 + 3$ [או אם תרצה, $35 + 8 + 3$]. השיטה בתוקף, אלא ש... יוסילה: אני מתאר לעצמי, כי בדוגמת הסבר זה, נמצא ב $38^2 = 1444$ בלחשב: $50 - 38 = 12$. צד ימין $= 144$. יתרה $= 1$. צד שמאל $= 5 + 8 + 1 = 14$ יוסילה: אני רואה! ספרון: אתם מדברים לעניין. וזה לא רק למעלה/מטה מ 50 . אבל כן למעלה/מטה מ 100 . אבל, אני מציע לכם, מה שהכנתי ... הנה הקבוצה של $+90$ בריבוע!

$90^2 = 81\ 00$	$95^2 = 90\ 25$
$91^2 = 82\ 81$	$96^2 = 92\ 16$
$92^2 = 84\ 64$	$97^2 = 94\ 09$
$93^2 = 86\ 49$	$98^2 = 96\ 04$
$94^2 = 88\ 36$	$99^2 = 98\ 01$
צד ימין המכפלה, כלול מריבוע. ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו.	
צד ימין המכפלה, כלול מריבוע. צד ימין = ריבוע משלים האחדות.	
ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו. $+80$ פעמיים האחדות.	
או כשיטה הנופצה צד שמאל, כמרחק המספר מ 100 . צד שמאל $= 100 -$ המספר המספר $-$ מה שקבלת.	

כלומר, $93^2 = 86\ 49$; צד ימין $= (10 - 3)^2 = 7^2 = 49$; צד שמאל $= 80 +$ (פעמיים 3) $= 86$ אך יש שיטה נפוצה, ומובן מאליו שאינה שייכת לפולחן שלי, והיא לחסר המספר ממאה. אכן נצטרך לעשות $100 - 93 = 7$; וכעת $93 - 7 = 86$ במילים אחרות.. $86 = (7 \cdot 2) - 100$ אני ניסיתי שיטה זו עם ה $+40$ בחיסור מחמישים ...

עשיתי $50 - 43 = 7$; $43 - 7 = 36$.. במקום **18** כי: $43^2 = 18\ 49$ כנראה יש צורך להוסיף עוד פעולה $[2 \div]$ (בסוד, $50 = \frac{1}{2}$ ל 100) ואז $18 = 2 \div 36$ מצידי, אני גיליתי לי עוד אפשרות למצוא צד שמאל למקרה של $+40$

$40^2 = 16\ 00$	$45^2 = 20\ 25$
$41^2 = 16\ 81$	$46^2 = 21\ 16$
$42^2 = 17\ 64$	$47^2 = 22\ 09$
$43^2 = 18\ 49$	$48^2 = 23\ 04$
$44^2 = 19\ 36$	$49^2 = 24\ 01$
ואפשר למצוא צד שמאל לעצמו. המספר -25	

כי כן $18 = 25 - 43$

$40^2 = 16\ 00$	$40 - 25 = 15$	$45^2 = 20\ 25$	$45 - 25 = 20$
$41^2 = 16\ 81$	$41 - 25 = 16$	$46^2 = 21\ 16$	$46 - 25 = 21$
$42^2 = 17\ 64$	$42 - 25 = 17$	$47^2 = 22\ 09$	$47 - 25 = 22$
$43^2 = 18\ 49$	$43 - 25 = 18$	$48^2 = 23\ 04$	$48 - 25 = 23$
$44^2 = 19\ 36$	$44 - 25 = 19$	$49^2 = 24\ 01$	$49 - 25 = 24$

אתה רואה יוסילה... תמיד יש מקום להרחיק לכת.

בלחשב: גמרת עם הריבועים?

ספרון: לא, אלא שצמצמתי את העבודה... כלומר מ 11 ועד 19 עשיתי מזה שני טפולים.

11^2	12 1	השמאלי = 12	$11 + 1$	$1^2 =$ האחדות
12^2	14 4	השמאלי = 14	$12 + 2$	$2^2 =$ האחדות
13^2	16 9	השמאלי = 16	$13 + 3$	$3^2 =$ האחדות
14^2	19 6	השמאלי = 18 +1	$14 + 4$	$4^2 =$ האחדות

צד ימין (האחדות) של $11^2 = 1$ והוא למעשה 1^2 .

צד ימין (האחדות) של $12^2 = 4$ והוא למעשה 2^2 .

צד ימין (האחדות) של $13^2 = 9$ והוא למעשה 3^2 .

צד ימין (האחדות) של $14^2 = 6$ והוא למעשה 4^2 . אכן אינו באמת 6 אלא 16.

בוא ונבדוק צד שמאל:

צד שמאל של $11^2 = 12$ והוא למעשה המספר 11 עם תוספת האחדות שלו.

צד שמאל של $12^2 = 14$ והוא למעשה המספר 12 עם תוספת האחדות שלו.

צד שמאל של $13^2 = 16$ והוא למעשה המספר 13 עם תוספת האחדות שלו.

צד שמאל של $14^2 = 19$ והוא למעשה המספר 14 עם תוספת האחדות שלו + היתרה מ 16

אחר עריכת הלוח הזה הגעתי להבין הרכבת הריבועים מ 6 ועד 9.

יוסילה: האם מצאת שריבועים אלו מורכבים?

ספרון: תסתכל בלוח זה...

9^2	8 1	$1^2 =$ האחדות	8 = השמאלי	$9 - 1$
8^2	6 4	$2^2 =$ האחדות	6 = השמאלי	$8 - 2$
7^2	4 9	$3^2 =$ האחדות	4 = השמאלי	$7 - 3$
6^2	3 6	$4^2 =$ האחדות	$2 + 1$ = השמאלי	$6 - 4$

מה עשינו? למצוא העשרות של הריבוע, חסרנו מהמספר, המשלים שלו. כמו 7 חסר $3 = 4$ של 49

האם אין זה דומה לאותה השיטה של "חיסור המספר המשלים" להגיע לצד השמאלי? מה

שראינו בקבוצת ה 90. (ומדוע כאן אנו עוסקים במשלימים? כי הננו מתחת ל 10)

בלחשב: אני מבין שיש גבול ושמו "50" אכן פעלנו ב למעלה/למטה מהגבול של 50.

וכן אני מבין שיש גבול ושמו "100" אכן פעלנו ב למעלה/למטה מהגבול של 100.

לאור זה יש להפיק מסקנה... כי יש גבול ושמו "10"... ולאור כך, הגענו ל $11^2, 12^2, 13^2, 14^2$.

ספרון: השאלה עד היכן משתלם, ועד היכן אין תהליך זה אלא משא כבד מנשוא.

יוסילה: אך לשם היכרות עולם המספרים ... האם כדאי לראות היאך נבנים ריבועים בדרך זו?

ספרון: בבקשה, הנה !

הן למטה מ 10 והן למעלה מ 10

השמאלי מתקדם "שתיים-שתיים" (מ 5 ועד 15)

משמאל לימין...

6^2	36	השמאלי = $1 + 2$	$6 - 4$	↓	$4^2 =$ האחדות
7^2	49	השמאלי = 4	$7 - 3$	1	$3^2 =$ האחדות
8^2	64	השמאלי = 6	$8 - 2$	1	$2^2 =$ האחדות
9^2	81	השמאלי = 8	$9 - 1$	1	$1^2 =$ האחדות
11^2	12 1	השמאלי = 12	$11 + 1$	1	$1^2 =$ האחדות
12^2	14 4	השמאלי = 14	$12 + 2$	1	$2^2 =$ האחדות
13^2	16 9	השמאלי = 16	$13 + 3$	1	$3^2 =$ האחדות
14^2	19 6	השמאלי = $1 + 18$	$14 + 4$	1	$4^2 =$ האחדות

הן למטה מ 20 והן למעלה מ 20

השמאלי מתקדם "ארבעה-ארבעה" (מ 15 ועד 25)

16^2	256	השמאלי = $1 + 24$	$16 + 8$	↓	האחדות = 4^2
17^2	289	השמאלי = 28	$17 + 11$	3	האחדות = 3^2
18^2	324	השמאלי = 32	$18 + 14$	3	האחדות = 2^2
19^2	361	השמאלי = 36	$19 + 17$	3	האחדות = 1^2
21^2	441	השמאלי = 44	$21 + 23$	3	האחדות = 1^2
22^2	484	השמאלי = 48	$22 + 26$	3	האחדות = 2^2
23^2	529	השמאלי = 52	$23 + 29$	3	האחדות = 3^2
24^2	576	השמאלי = $1 + 56$	$24 + 32$	3	האחדות = 4^2

הן למטה מ 30 והן למעלה מ 30

השמאלי מתקדם "ששה-ששה" (מ 25 ועד 35)

26^2	676	השמאלי = $1 + 66$	$26 + 40$	↓	האחדות = 4^2
27^2	729	השמאלי = 72	$27 + 45$	5	האחדות = 3^2
28^2	784	השמאלי = 78	$28 + 50$	5	האחדות = 2^2
29^2	841	השמאלי = 84	$29 + 55$	5	האחדות = 1^2
31^2	961	השמאלי = 96	$31 + 65$	5	האחדות = 1^2
32^2	1024	השמאלי = 102	$32 + 70$	5	האחדות = 2^2
33^2	1089	השמאלי = 108	$33 + 75$	5	האחדות = 3^2
34^2	1156	השמאלי = $1 + 114$	$34 + 80$	5	האחדות = 4^2

הן למטה מ 40 והן למעלה מ 40

השמאלי מתקדם "שמונה-שמונה" (מ 35 ועד 45)

36^2	1296	השמאלי = $1 + 128$	$36 + 92$	↓	האחדות = 4^2
37^2	1369	השמאלי = 136	$37 + 99$	7	האחדות = 3^2
38^2	1444	השמאלי = 144	$38 + 106$	7	האחדות = 2^2
39^2	1521	השמאלי = 152	$39 + 113$	7	האחדות = 1^2
41^2	1681	השמאלי = 168	$41 + 127$	7	האחדות = 1^2
42^2	1764	השמאלי = 176	$42 + 134$	7	האחדות = 2^2
43^2	1849	השמאלי = 184	$43 + 141$	7	האחדות = 3^2
44^2	1936	השמאלי = $1 + 192$	$44 + 148$	7	האחדות = 3^2

בלחשב: האם אפשר לחזור למה שעסקנו בו?

יוסילה: ... הדבר האחרון שהסברת לנו היה מ 11^2 עד 14^2 ...

ספרון: כעת אנו נראה מ 19^2 ועד 16^2 לזה צריך לדעת לִכְפּוֹל ב 4.

19^2	361	השמאלי = 36	$36 = 9 \times 4$	1^2 = האחדות
18^2	324	השמאלי = 32	$32 = 8 \times 4$	2^2 = האחדות
17^2	289	השמאלי = 28	$28 = 7 \times 4$	3^2 = האחדות
16^2	256	השמאלי = $1 + 24$	$24 = 6 \times 4$	4^2 = האחדות

כופלים האחדות ב 4, ומקבלים הצד השמאלי.

האם יש שאלות?

בלחשב : מעניין שצד שמאל הוא כפל של 4!!

יוסילה : אכן, כן הוא!

17^2 בהיותו למטה מ 20 הנו מקבל באחדות הריבוע של ה 3 המשלים ל 7?

ובצד השמאלי יש להסתפק לומר 4 פעמים $7 = 28$ זה באמת כל כך פשוט!

ספרון : אתה יכול להמשיך באותה שיטה עבור 21^2 ועד 24^2 ... אלא שאין זה הכי משתלם.

כמו שאין זה הכי משתלם להתייחס ל 16^2 ועד 19^2 בדרך שהתייחסנו ל 11^2 ל 14^2

19^2	361	השמאלי = 36	$19 + 8 + 9$	$1^2 =$ האחדות
18^2	324	השמאלי = 32	$18 + 6 + 8$	$2^2 =$ האחדות
17^2	289	השמאלי = 28	$17 + 4 + 7$	$3^2 =$ האחדות
16^2	256	השמאלי = $24 + 1$	$16 + 2 + 6$	$4^2 =$ האחדות

הוכרחנו להוסיף 2, 4, 6, 8 (כלומר, פעמיים $(5 - 9)$ או $(5 - 8)$)

בוודאי שאינך רואה בכך השיטה הכי משתלמת...

בלחשב : אז מה אתה יכול לעשות עוד יותר טוב מזה? זהו עדיין לכפול ב 4

21^2	441	השמאלי = 44	$44 = 11 \times 4$	$1^2 =$ האחדות
22^2	484	השמאלי = 48	$48 = 12 \times 4$	$2^2 =$ האחדות
23^2	529	השמאלי = 52	$52 = 13 \times 4$	$3^2 =$ האחדות
24^2	576	השמאלי = $1 + 56$	$56 = 14 \times 4$	$4^2 =$ האחדות

ספרון : באמת, גם מה שאתה מייצג הנו שיטה לעצמה... אך מה דעתך על זה?

21^2	441	השמאלי = 44	$44 = 2 \times (1 + 21)$	$1^2 =$ האחדות
22^2	484	השמאלי = 48	$48 = 2 \times (2 + 22)$	$2^2 =$ האחדות
23^2	529	השמאלי = 52	$52 = 2 \times (3 + 23)$	$3^2 =$ האחדות
24^2	576	השמאלי = $1 + 56$	$56 = 2 \times (4 + 24)$	$4^2 =$ האחדות

האין זה המשכיות למה שכבר ראינו מ 11 עד 14...

11^2	121	השמאלי = 12	$12 = 1 \times (1 + 11)$	$1^2 =$ האחדות
12^2	144	השמאלי = 14	$14 = 1 \times (2 + 12)$	$2^2 =$ האחדות
13^2	169	השמאלי = 16	$16 = 1 \times (3 + 13)$	$3^2 =$ האחדות
14^2	196	השמאלי = $1 + 18$	$18 = 1 \times (4 + 14)$	$4^2 =$ האחדות

יוסילה : כנראה שיש כאן שתי אפשרויות משתלמות... זו של בלחשב וזו של ספרון.

בלחשב : אני נוכח לדעת כי השיטה שלי, היא חד פעמי. מה שאין כן השיטה של ספרון, אנו נוכל

להמשיך לבנות הלוח של $31^2, 32^2, 33^2, 34^2$.

ספרון : אם אתה כבר מבחין בכך, אז אני מכבד אותך לערוך לנו אותו לוח של $31^2, 32^2, 33^2, 34^2$.

בלחשב : חושבני כי כך אמור להיות!

31^2	961	השמאלי = 96	$96 = 3 \times (1 + 31)$	$1^2 =$ האחדות
32^2	1024	השמאלי = 102	$102 = 3 \times (2 + 32)$	$2^2 =$ האחדות
33^2	1089	השמאלי = 108	$108 = 3 \times (3 + 33)$	$3^2 =$ האחדות
34^2	1156	השמאלי = $1 + 114$	$114 = 3 \times (4 + 34)$	$4^2 =$ האחדות

ספרון : 100%! אתה רואה כאשר שמים לב יכולים לקחת המשטות לידיים.

כעת לעסוק ב 61^2 ועד 64^2 . הידעת כי : $121 = 11^2$; $3721 = 61^2$... כלומר כלול ב 61^2 אותו 11^2 .

הבה ונראה ההבדל ביניהם,

$$3600 = 121 - 3721 = 11^2 - 61^2$$

$$3700 = 144 - 3844 = 12^2 - 62^2$$

$$3800 = 169 - 3969 = 13^2 - 63^2$$

$$3900 = 196 - 4096 = 14^2 - 64^2$$

אנו מוצאים אודות צד שמאל, כי 61^2 מורכב מ 11^2 ועוד איזה מספר השייך לצד שמאל.

משמאל לימין.

$50 + 11 = 61$					
61^2	3721	השמאלי $37\ 2 =$	$37 = 25 + 11 + 1$	$37 = 35 + 1 + 1$	$1^2 =$ האחדות
62^2	3844	השמאלי $38\ 4 =$	$38 = 25 + 12 + 1$	$38 = 35 + 2 + 1$	$2^2 =$ האחדות
63^2	3969	השמאלי $39\ 6 =$	$39 = 25 + 13 + 1$	$39 = 35 + 3 + 1$	$3^2 =$ האחדות
64^2	4096	השמאלי $1 + 40\ 8 =$	$40 = 25 + 14 + 1$	$40 = 35 + 4 + 1$	$4^2 =$ האחדות

ובכן כאן אתה יכול להבחין ממה מורכב הצד השמאלי. מ 11 בעצמו, ומהיתרה של 121 ומ 25

$37 = 25 + 11 + 1$
$38 = 25 + 12 + 1$
$39 = 25 + 13 + 1$
$40 = 25 + 14 + 1$

לשים לב כי כאן הוספנו 25 .. היות כי $37 = 25 + 11 + 1$ (וזה המשכיות ל $58^2 = 33\ 64$ כאשר $33 + 8 = 25 + 8$)

$37 = 35 + 1 + 1$
$38 = 35 + 2 + 1$
$39 = 35 + 3 + 1$
$40 = 35 + 4 + 1$

אבל אלו הפעולות עם תוספת 35 , הם המשך התהליך ... לזכור כי $(+50)^2$, צד שמאל בנוי מהאחדות בתוספת 25 , וכן $(+40)^2$, צד שמאל בנוי מהאחדות בתוספת 15 , וגם כאן $(+60)^2$, צד שמאל בנוי מהאחדות בתוספת 35 . והנה יתר הלוח השייך ל $(+60)^2$, הגם שכבר לא משתלם, כי יש להוסיף יתרה $= 2$ או 3 .

69^2	4761	השמאלי $47\ 6 =$	$361 = 19^2$	$47 = 35 + 9 + 3$	$1^2 =$ האחדות
68^2	4624	השמאלי $46\ 2 =$	$324 = 18^2$	$46 = 35 + 8 + 3$	$2^2 =$ האחדות
67^2	4489	השמאלי $44\ 8 =$	$289 = 17^2$	$44 = 35 + 7 + 2$	$3^2 =$ האחדות
66^2	4356	השמאלי $1 + 43\ 4 =$	$256 = 16^2$	$43 = 35 + 6 + 2$	$4^2 =$ האחדות

יוסילה: לפי תהליך זה אמור להיות $(+70)^2$, צד שמאל בנוי מהאחדות בתוספת 45 , $(+80)^2$, צד שמאל בנוי מהאחדות בתוספת 55 , $(+90)^2$, צד שמאל בנוי מהאחדות בתוספת 65 , וכן הלאה...
 ספרון: אתה צודק. אבל אנו מרימים המשא שאנו יכולים לשאת. אלו כבדים עלינו.
 בלחשב: אתה מתכוון לומר שאלו דורשים "חשבון" ואנו מחפשים מה שיש בו פחות חשבון.
 יוסילה: אתה צודק! בל-חשב! .. סוף-סוף, מה עניין 19^2 כאן?
 ספרון: אם תרצה לראות האמת לאמתה... תסתכל בזה

69^2	4761	$361 = 19^2$	$69^2 - 19^2 =$	$4761 - 361 = 4400$
68^2	4624	$324 = 18^2$	$68^2 - 18^2 =$	$4624 - 324 = 4300$
67^2	4489	$289 = 17^2$	$67^2 - 17^2 =$	$4489 - 289 = 4200$
66^2	4356	$256 = 16^2$	$66^2 - 16^2 =$	$4356 - 256 = 4100$

יוסילה: אני מבין! כאילו היה דבר כזה

69^2	4761	$361 = 19^2$	47 61	$44 + 3 = 47$
68^2	4624	$324 = 18^2$	46 24	$43 + 3 = 46$
67^2	4489	$289 = 17^2$	44 89	$42 + 2 = 44$
66^2	4356	$256 = 16^2$	43 56	$41 + 2 = 43$

ספרון: תודה, יוסילה. אני צריך לגלות לכם סוד שאינו ממש סוד אלא למי שמתעורר להבחין מקרוב.

כנגד ארבעה בנים דברה תורה, תורת הריבועים... רצוני להציג 4 מספרים, עם אותו צד ימין. 11 . 39 . 61 . 89 . $(150 = 89 + 61)$. איך מגיעים למספרים אלו? 11 ועוד $50 = 61$ ועוד שני מספרים אחרים. $89 = 11 - 100$; $39 = 61 - 100$ (ואם תרצו $89 = 50 - 39$)

11^2	<u>121</u>	39^2	<u>1521</u>	61^2	<u>3721</u>	89^2	<u>7921</u>
--------	------------	--------	-------------	--------	-------------	--------	-------------

ארבעת בנים אלו שייכים למשפחת ה 11^2 צד הימין שלהם הוא אותו צד ימין... והצד השמאל שלהם... יש לו מציאות לעצמו, אלא שנוסף על מציאותו הבלעדית, עליו לכלול היתרה של ה 121

$$121 = 11^2$$

$$1521 = 39^2$$

$$3721 = 61^2$$

$$7921 = 89^2$$

הצד השמאלי שלו, אינו אלא 14 נטו. אך למעשה, הוא חייב לכלול היתרה.
הצד השמאלי שלו, אינו אלא 36 נטו. אך למעשה, הוא חייב לכלול היתרה.
הצד השמאלי שלו, אינו אלא 78 נטו. אך למעשה, הוא חייב לכלול היתרה.
אכן אם נדע איך להגיע לאלו המספרים $14, 36, 78$? נוכל לגלות שיטה "ללא חשבון" לכל קבוצה יוסילה: מה זה קבוצה?
ספרון: הנה קבוצת ה 36^2

יש כאן $36^2, 37^2, 38^2, 39^2$

39^2	<u>1521</u>	$50 = 11 + 39$	$25 - 11 = 14$	השמאלי נטו = 14
38^2	<u>1444</u>	$50 = 12 + 38$	$25 - 12 = 13$	השמאלי נטו = 13
37^2	<u>1369</u>	$50 = 13 + 37$	$25 - 13 = 12$	השמאלי נטו = 12
36^2	<u>1296</u>	$50 = 14 + 36$	$25 - 14 = 11$	השמאלי נטו = 11

בלחשב: $39 = 11 - 50$; $14 = 11 - 25$; והוא צד שמאל נטו (לפני הוספת היתרה), צד ימין כולל 11^2 .
יוסילה: כן! זהו... למרות שיש אפשרות לומר 39 פחות $25 = 14$. אבל אפשר להמשיך בדרך זו!
 $38 = 12 - 50$; $13 = 12 - 25$; כי זהו צד שמאל נטו, ובצד ימין נכלל 12^2 והיתרה נוספת לנטו.
 $37 = 13 - 50$; $12 = 13 - 25$; כי זהו צד שמאל נטו, ובצד ימין נכלל 13^2 והיתרה נוספת לנטו.
 $36 = 14 - 50$; $11 = 14 - 25$; כי זהו צד שמאל נטו, ובצד ימין נכלל 14^2 והיתרה נוספת לנטו.
ספרון: עבודה טובה, יוסילה!

אגב! המקל שלנו העבודה, כי ארבעתן $11^2, 12^2, 13^2, 14^2$.. היתרה שלהם = 1 .

$$121 = 11^2$$

$$144 = 12^2$$

$$169 = 13^2$$

$$196 = 14^2$$

בלחשב: רגע! יוסילה גילה לנו דרך אחרת. הבה ונבדוק, איך זה נראה?

39^2	<u>1521</u>	$39 - 25 = 14$	$14 = 25 - 11$	נטו = 14 השמאלי
38^2	<u>1444</u>	$38 - 25 = 13$	$13 = 25 - 12$	נטו = 13 השמאלי
37^2	<u>1369</u>	$37 - 25 = 12$	$12 = 25 - 13$	נטו = 12 השמאלי
36^2	<u>1296</u>	$36 - 25 = 11$	$11 = 25 - 14$	נטו = 11 השמאלי

ספרון: ועכשיו שהנכם מכירים, מה היא "קבוצת מספרים בריבוע".

יש לי להגיש לכם קבוצות מ 4 ריבועים. והנה קבוצת ה 11^2 .

11^2	<u>121</u>	39^2	<u>1521</u>	61^2	<u>3721</u>	89^2	<u>7921</u>
--------	------------	--------	-------------	--------	-------------	--------	-------------

בלחשב: רגע! אני רוצה לראות 89^2 וחבריו. איך זה מסתדר?

ספרון: הנה!

יש כאן $86^2, 87^2, 88^2, 89^2$

($89 = 11 - 100$ או $50 + 39 = 89$)

89^2	<u>7921</u>	$2 \times 39 = 78$	$100 - (2 \times 11) = 78$	$50 + (2 \times 14) = 78$	השמאלי נטו = 78
88^2	<u>7744</u>	$2 \times 38 = 76$	$100 - (2 \times 12) = 76$	$50 + (2 \times 13) = 76$	השמאלי נטו = 76
87^2	<u>7569</u>	$2 \times 37 = 74$	$100 - (2 \times 13) = 74$	$50 + (2 \times 12) = 74$	השמאלי נטו = 74
86^2	<u>7396</u>	$2 \times 36 = 72$	$100 - (2 \times 14) = 72$	$50 + (2 \times 11) = 72$	השמאלי נטו = 72

וכעת: נראה אם עדיין יוסילה יכול לעזור לנו?

יוסילה : אני אנסה!

$89 = 11 - 100$; $89 = 11 - 78$ כי זהו צד שמאל נטו, ובצד ימין נכלל 11^2 והיתרה נוספת לנטו.
 $88 = 12 - 100$; $88 = 12 - 76$ כי זהו צד שמאל נטו, ובצד ימין נכלל 12^2 והיתרה נוספת לנטו.
 $87 = 13 - 100$; $87 = 13 - 74$ כי זהו צד שמאל נטו, ובצד ימין נכלל 13^2 והיתרה נוספת לנטו.
 $86 = 14 - 100$; $86 = 14 - 72$ כי זהו צד שמאל נטו, ובצד ימין נכלל 14^2 והיתרה נוספת לנטו.
 בלחשב: מתוך דברי יוסילה, אפשר להגיע ל..

78^2	6084	$2 \times 39 = 78$	$100 - (2 \times 11) = 78$	$50 + (2 \times 14) = 78$	$78 = 11 - 100$
--------	------	--------------------	----------------------------	---------------------------	-----------------

כאן כבר יש לנו שלוש שיטות להגיע ל 78. אך יוסילה הגיע ל 78 בדרך משלו.
 ספרון : איני מאמין כי אדם מעולם הגדול היה מגיע לכאלו תוצאות. כי יוסילה, בוודאי משלנו!
 יוסילה : בסופו של דבר, יש הרבה יותר מדרך אחת להגיע...
 ספרון : בסופו של דבר, אני יכול להציע לכם 4 הריבועים?
 לחזור על מה שאמרתי...

11 . 39 . $(50 = 39 + 11)$. **61 . 89 .** $(150 = 89 + 61)$. איך מגיעים למספרים אלו? **11** ועוד $50 = 61$
 ועוד שני מספרים אחרים. $89 = 11 - 100$; $61 = 100 - 39$ (ואם תרצו $39 = 50 - 89$)
 יותר טוב להתחיל מ 1^2 .

את הפעולות האלו אנו כבר מכירים. ויודעים איך לפתור אותם ללא חשבון.
 ובכל זאת לארבעת הריבועים, שבכל שורה, יש אותו "צד מין".

כעת נסתכל על צד ימין שלהם. ממה מורכב?

1^2	01	49^2	2401	51^2	2601	99^2	9801
2^2	4	48^2	2304	52^2	2704	98^2	9604
3^2	9	47^2	2209	53^2	2809	97^2	9409
4^2	16	46^2	2116	54^2	2916	96^2	9216
5^2	25	45^2	2025	55^2	3025	95^2	9025
6^2	36	44^2	1936	56^2	3136	94^2	8836
7^2	49	43^2	1849	57^2	3249	93^2	8649
8^2	64	42^2	1764	58^2	3364	92^2	8464
9^2	81	41^2	1681	59^2	3481	91^2	8281

אני אתן ביאור לשורה-1 ואתם כבר תבינו איך יתר השורות מסתדרות..

1^2	01	49^2	2401	51^2	2601	99^2	9801
-------	----	--------	------	--------	------	--------	------

עבור המספר "1"

צד שמאל של 49 שהוא $1 - 50 \leftarrow$ שמאל $24 = 1 - 25$ (נטו) אנו למדנו $24 = 9 + 15$
 צד שמאל של 51 שהוא $1 + 50 \leftarrow$ שמאל $26 = 1 + 25$ (נטו) אנו למדנו $26 = 1 + 25$
 צד שמאל של 99 שהוא $1 - 100 \leftarrow$ שמאל $98 = 1 - 99$ (נטו) אנו למדנו $98 = (9 \times 2) + 80$
 בלחשב: אין דבר, תן לי לבדוק עוד שורה..

8^2	64	42^2	1764	58^2	3364	92^2	8464
-------	----	--------	------	--------	------	--------	------

צד שמאל של 42 שהוא $8 - 50 \leftarrow$ שמאל $17 = 8 - 25$ (נטו)
 צד שמאל של 58 שהוא $8 + 50 \leftarrow$ שמאל $33 = 8 + 25$ (נטו)
 צד שמאל של 92 שהוא $8 - 100 \leftarrow$ שמאל $84 = 8 - 92$ (נטו)
 ספרון : בקיצור, כל הרבועים מ 1 ועד 100 בריבוע, אינם אלא 4 עמודות, מ 25 שורות.
 כמה שורות מהם, כבר, יש לאל ידנו לפתור ללא חשבון?
 מתוך כל אותם פעולות.

חלק מוכר לנו בקלי קלות.

חלק מוכר לנו רק צריכים כמה תרגילים לשלוט בחומר.

וחלק הניתן להגיע אליו, בעבודה עצמית לאור מה שלמדנו היום.
 והנה כולם ביחד

ואלו הם כל האפשרויות :

↓	0	50^2	2500	↓	2500	100^2	10000
1^2	1	49^2	2401	51^2	2601	99^2	9801
2^2	4	48^2	2304	52^2	2704	98^2	9604
3^2	9	47^2	2209	53^2	2809	97^2	9409
4^2	16	46^2	2116	54^2	2916	96^2	9216
5^2	25	45^2	2025	55^2	3025	95^2	9025
6^2	36	44^2	1936	56^2	3136	94^2	8836
7^2	49	43^2	1849	57^2	3249	93^2	8649
8^2	64	42^2	1764	58^2	3364	92^2	8464
9^2	81	41^2	1681	59^2	3481	91^2	8281
10^2	100	40^2	1600	60^2	3600	90^2	8100
11^2	121	39^2	1521	61^2	3721	89^2	7921
12^2	144	38^2	1444	62^2	3844	88^2	7744
13^2	169	37^2	1369	63^2	3969	87^2	7569
14^2	196	36^2	1296	64^2	4096	86^2	7396
15^2	225	35^2	1225	65^2	4225	85^2	7225
16^2	256	34^2	1156	66^2	4356	84^2	7056
17^2	289	33^2	1089	67^2	4489	83^2	6889
18^2	324	32^2	1024	68^2	4624	82^2	6724
19^2	361	31^2	961	69^2	4761	81^2	6561
20^2	400	30^2	900	70^2	4900	80^2	6400
21^2	441	29^2	841	71^2	5041	79^2	6241
22^2	484	28^2	784	72^2	5184	78^2	6084
23^2	529	27^2	729	73^2	5329	77^2	5929
24^2	576	26^2	676	74^2	5476	76^2	5776
25^2	625	↑	625	75^2	5625	↑	5625

רובם ניתן לפתור ללא חשבון.

ויש כאלו שלמדנו היום דרך הרכבתם.

ואני מאמין כי אם עושים כמה תרגילים נוכל לשלוט, ולהגיע ללא חשבון הניתן!

ויש אותם הנשארים, אם באמת רוצים לשלוט ...

לא נשאר אלה לפתח לכל קבוצה דרכי הרכבת הריבוע, כי כבר ראינו כי יש יותר מדרך אחת.

ובפרט, כי בכל אלו יש לנו רק 25 "צד ימין" להכיר, ורובם כבר מוכרים לנו (ואת היתרה).

ואני מאמין כי מי שישלוט גם על 11^2 ועד 14^2 , יוכל לפתור כל השורות שלהם.

ואני מאמין כי מי שישלוט גם על 19^2 ועד 16^2 , יוכל לפתור כל השורות שלהם.

ואני מאמין כי מי שישלוט גם על 21^2 ועד 24^2 , יוכל לפתור כל השורות שלהם.

ובזה, הכל בידי "מי שרוצה להגיע".

אתם זוכרים איך סדרנו עבור 54^2 ? ... צד ימין 4^2 ; צד שמאל $25 + 4$ (של 54)

אתם זוכרים איך סדרנו עבור 44^2 ? ... צד ימין 6^2 ; צד שמאל $15 + 4$ (של 44)

איך לאור שיטה זו 25 ו 15 יהיה אפשר להמשיך ב 5 , למצוא 34^2 ? צד שמאל $5 + 4$

אלא שצד ימין $16^2 = 256$..

אכן צד שמאל $11 = 2 + 4 + 5$

34^2	1156
--------	------

ואנו מוצאים שזה מאוד מוצלח, וללא ערעורים ... אלא שזה יכול להתקבל רק למי שמעוניין בכך.

$1156 = 34^2$... $256 = 16^2$... $900 = 256 - 1156$... צד שמאל $2 + 4 + 5$ (של 34)

$4096 = 64^2$... $196 = 14^2$... $3900 = 196 - 4096$... צד שמאל $1 + 4 + 35$ (של 64)

תוספת חומר, למעוניינים.

11 x 10 = 01 10	11 x 20 = 02 20	11 x 30 = 03 30	11 x 40 = 04 40	11 x 50 = 05 50
21 x 10 = 02 10	21 x 20 = 04 20	21 x 30 = 06 30	21 x 40 = 08 40	21 x 50 = 10 50
31 x 10 = 03 10	31 x 20 = 06 20	31 x 30 = 09 30	31 x 40 = 12 40	31 x 50 = 15 50
41 x 10 = 04 10	41 x 20 = 08 20	41 x 30 = 12 30	41 x 40 = 16 40	41 x 50 = 20 50
51 x 10 = 05 10	51 x 20 = 10 20	51 x 30 = 15 30	51 x 40 = 20 40	51 x 50 = 25 50
61 x 10 = 06 10	61 x 20 = 12 20	61 x 30 = 18 30	61 x 40 = 24 40	61 x 50 = 30 50
71 x 10 = 07 10	71 x 20 = 14 20	71 x 30 = 21 30	71 x 40 = 28 40	71 x 50 = 35 50
81 x 10 = 08 10	81 x 20 = 16 20	81 x 30 = 24 30	81 x 40 = 32 40	81 x 50 = 40 50
91 x 10 = 09 10	91 x 20 = 18 20	91 x 30 = 27 30	91 x 40 = 36 40	91 x 50 = 45 50
11 x 60 = 06 60	11 x 70 = 07 70	11 x 80 = 08 80	11 x 90 = 09 90	צד ימין-המכפלה אינו אלא המכפיל עם האפס. צד שמאל כפל העשרות בינם לבין עצמם.
21 x 60 = 12 60	21 x 70 = 14 70	21 x 80 = 16 80	21 x 90 = 18 90	
31 x 60 = 18 60	31 x 70 = 21 70	31 x 80 = 24 80	31 x 90 = 27 90	
41 x 60 = 24 60	41 x 70 = 28 70	41 x 80 = 32 80	41 x 90 = 36 90	
51 x 60 = 30 60	51 x 70 = 35 70	51 x 80 = 40 80	51 x 90 = 45 90	
61 x 60 = 36 60	61 x 70 = 42 70	61 x 80 = 48 80	61 x 90 = 54 90	
71 x 60 = 42 60	71 x 70 = 49 70	71 x 80 = 56 80	71 x 90 = 63 90	
81 x 60 = 48 60	81 x 70 = 56 70	81 x 80 = 64 80	81 x 90 = 72 90	
91 x 60 = 54 60	91 x 70 = 63 70	91 x 80 = 72 80	91 x 90 = 81 90	

19 x 10 = 01 90	19 x 20 = 03 80	19 x 30 = 05 70	19 x 40 = 07 60	19 x 50 = 09 50
29 x 10 = 02 90	29 x 20 = 05 80	29 x 30 = 08 70	29 x 40 = 11 60	29 x 50 = 14 50
39 x 10 = 03 90	39 x 20 = 07 80	39 x 30 = 11 70	39 x 40 = 15 60	39 x 50 = 19 50
49 x 10 = 04 90	49 x 20 = 09 80	49 x 30 = 14 70	49 x 40 = 19 60	49 x 50 = 24 50
59 x 10 = 05 90	59 x 20 = 11 80	59 x 30 = 17 70	59 x 40 = 23 60	59 x 50 = 29 50
69 x 10 = 06 90	69 x 20 = 13 80	69 x 30 = 20 70	69 x 40 = 27 60	69 x 50 = 34 50
79 x 10 = 07 90	79 x 20 = 15 80	79 x 30 = 23 70	79 x 40 = 31 60	79 x 50 = 39 50
89 x 10 = 08 90	89 x 20 = 17 80	89 x 30 = 26 70	89 x 40 = 35 60	89 x 50 = 44 50
99 x 10 = 09 90	99 x 20 = 19 80	99 x 30 = 29 70	99 x 40 = 39 60	99 x 50 = 49 50
19 x 60 = 11 40	19 x 70 = 13 30	19 x 80 = 15 20	19 x 90 = 17 10	צד ימין-המכפלה אינו אלא המשלים למכפיל עם האפס. צד שמאל כפל העשרות לאחר שמעגלים (מוסיפים 1 למספר עם 9) ומחסרים 1.
29 x 60 = 17 40	29 x 70 = 20 30	29 x 80 = 23 20	29 x 90 = 26 10	
39 x 60 = 23 40	39 x 70 = 27 30	39 x 80 = 31 20	39 x 90 = 35 10	
49 x 60 = 29 40	49 x 70 = 34 30	49 x 80 = 39 20	49 x 90 = 44 10	
59 x 60 = 35 40	59 x 70 = 41 30	59 x 80 = 47 20	59 x 90 = 53 10	
69 x 60 = 41 40	69 x 70 = 48 30	69 x 80 = 55 20	69 x 90 = 62 10	
79 x 60 = 47 40	79 x 70 = 55 30	79 x 80 = 63 20	79 x 90 = 71 10	
89 x 60 = 53 40	89 x 70 = 62 30	89 x 80 = 71 20	89 x 90 = 80 10	
99 x 60 = 59 40	99 x 70 = 69 30	99 x 80 = 79 20	99 x 90 = 89 10	

ובכך נפרדו יוסילה ובלחשב, מחברם ספרון. וכעת הם יודעים דברים שלא הכירו לפני הביקור שלהם אצלו.