

אנו והאתגרים

במה מדובר! ומה האתגר?
להסתכל על פעולת חשבון, ולהגות קצת,
ולתת תשובה מהירה ומדויקת
בעזרת החשבון ללא חשבון.

מהיום תעמוד לרשותך כמות ספרים אלקטרוניים.
כן, ספרים שהוקדשו ויוחדו לספק לך אתגרים מתמטיים.
כל ספר יכיל רק מספר דפים מצומצמים,
היות שאין התכלית מזה להטריד אותך בהסברים,
כי אם להעלותך מעלה מעלה, מעל לכל שיגרה שבחשבון.



בספר זה!

אתה צריך להסתכל על פעולה חשבונית זו ...
ולהגות קצת, ולתת התשובה המדויקת.
על איזו פעולה מדובר? הנה ...

$$\begin{array}{r} 3732 \times 3866 \\ + 3733 \times 6134 \\ \hline = 3732 \ 6134 \end{array}$$

לקרוא התשובה.

הקדמה.

כולנו יודעים מה זה קונטקסט מספרי של 10 או של 100.
ואף החשבון ללא חשבון השייך לאותו קונטקסט, איך לכפול ב 10 או ב 100
אין מי מאתנו העובר תהליך החשבון לכפול ב 100.

בספרי האתגרים אנו נכיר מקרוב יותר הרבה פעולות ותחומים מספריים,
קונטקסטים שבהם יהיה ניתן לפתור פעולותיהם ללא חשבון.

האתגרים שבספר זה!

בספר זה אנו נראה ...

האם ניתן לעשות עסק שלם

משני מספרים המשלימים 10

$$0 + 10 = 1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6 = 5 + 5 = 10$$

מה למשל אפשר לעשות מזה??

ידוע לנו כי

$$7 \times 10 = 70$$

הבה ונעביר המכפיל 7 לכל הפעולות שראינו.

כלומר להחליף

$$7 \times 10 = 70$$

בשתי פעולות.

$$(7 \times 1) + (7 \times 9) = 70$$

$$(7 \times 2) + (7 \times 8) = 70$$

$$(7 \times 3) + (7 \times 7) = 70$$

$$(7 \times 4) + (7 \times 6) = 70$$

$$(7 \times 5) + (7 \times 5) = 70$$

$$(7 \times 0) + (7 \times 10) = 70$$

הבה ונגיש כל זה בדרך המוכרת לנו.

$\begin{array}{r} 7 \times 1 \\ + 7 \times 9 \\ \hline 70 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 2 \\ + 7 \times 8 \\ \hline 70 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 3 \\ + 7 \times 7 \\ \hline 70 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 4 \\ + 7 \times 6 \\ \hline 70 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 5 \\ + 7 \times 5 \\ \hline 70 \end{array}$
--	--	--	--	--

אנו נרחיק לכת בתוספת פעולה קטנה,

המספר שבשורה התחתונה שהוכפל ב 7, הפעם לכפול ב 1.

$\begin{array}{r} 7 \times 1 \\ 7 \times 9 \\ + 1 \times 9 \\ \hline 79 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 2 \\ 7 \times 8 \\ + 1 \times 8 \\ \hline 78 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 3 \\ 7 \times 7 \\ + 1 \times 7 \\ \hline 77 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 4 \\ 7 \times 6 \\ + 1 \times 6 \\ \hline 76 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 5 \\ 7 \times 5 \\ + 1 \times 5 \\ \hline 75 \end{array}$
$\begin{array}{r} 7 \times 6 \\ 7 \times 4 \\ + 1 \times 4 \\ \hline 74 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 7 \\ 7 \times 3 \\ + 1 \times 3 \\ \hline 73 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 8 \\ 7 \times 2 \\ + 1 \times 2 \\ \hline 72 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 9 \\ 7 \times 1 \\ + 1 \times 1 \\ \hline 71 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 10 \\ 7 \times 0 \\ + 1 \times 0 \\ \hline 70 \end{array}$

בסדר! אנו נראה בדיוק
מה עשינו?

7×1 7×9 $+ 1 \times 9$ 79	7×1 $+ 8 \times 9$ 79	7×2 7×8 $+ 1 \times 8$ 78	7×2 $+ 8 \times 8$ 78	7×3 7×7 $+ 1 \times 7$ 77	7×3 $+ 8 \times 7$ 77
7×4 7×6 $+ 1 \times 6$ 76	7×4 $+ 8 \times 6$ 76	7×5 7×5 $+ 1 \times 5$ 75	7×5 $+ 8 \times 5$ 75	7×6 7×4 $+ 1 \times 4$ 74	7×6 $+ 8 \times 4$ 74
7×7 7×3 $+ 1 \times 3$ 73	7×7 $+ 8 \times 3$ 73	7×8 7×2 $+ 1 \times 2$ 72	7×8 $+ 8 \times 2$ 72	7×9 7×1 $+ 1 \times 1$ 71	7×9 $+ 8 \times 1$ 71

כאן רואים בדיוק, שיכולים לפתור פעולה, רק על ידי קריאה.

7×8 7×2 $+ 1 \times 2$ 72	7×8 $+ 8 \times 2$ 72
--	--------------------------------------

אני מסתכל ב 7 שיש ב 7×8 וקורה 70,
ואני מסתכל ב 8×2 וקורא 2
כלומר אני קורא 72.

וכעת נשאלת השאלה,
איך אני יכול לסדר בהתאם,
ולקרוא מה שאני רוצה לקרוא?

$7 \times ?$ $+ ? \times 0$ 70	$7 \times ?$ $+ ? \times 1$ 71	$7 \times ?$ $+ ? \times 2$ 72	$7 \times ?$ $+ ? \times 3$ 73	$7 \times ?$ $+ ? \times 4$ 74
$7 \times ?$ $+ ? \times 5$ 75	$7 \times ?$ $+ ? \times 6$ 76	$7 \times ?$ $+ ? \times 7$ 77	$7 \times ?$ $+ ? \times 8$ 78	$7 \times ?$ $+ ? \times 9$ 79

יש שני תנאים

תנאי למכפיל מימין, ותנאי למכפיל השמאלי.

$7 \times ?$ $+ ? \times 4$ 74	7×6 $+ ? \times 4$ 74	7×6 $+ 8 \times 4$ 74
--------------------------------------	--------------------------------------	--------------------------------------

המכפיל (העליון) מימין צריך להשלים ל 10.

היות ויש לנו המכפיל מימין (התחתון) = 4, אנו נשלים ל 10, ונכתוב 6 (למעלה).

התנאי השני. ועוד 1!

המכפיל העליון משמאל = 7

התחתון אמור להיות = 8

לבחון הידע שלנו!
האם נדע למלאות החסר?

$36 \times ?$ $+ ?? \times 8$ 368	$42 \times ?$ $+ ?? \times 7$ 427	$68 \times ?$ $+ ?? \times 6$ 686
---	---	---

שלב-א' ... (השלמה ל 10)

36×2 $+ ?? \times 8$ 368	42×3 $+ ?? \times 7$ 427	68×4 $+ ?? \times 6$ 686
---	---	---

שלב-ב' ... (ועוד 1)

36×2 $+ 37 \times 8$ 368	42×3 $+ 43 \times 7$ 427	68×4 $+ 69 \times 6$ 686
---	---	---

האם בדקת במחשבון שלך.
עכשיו אתה יכול ללכת לבטח!

עוד תרגיל מתקדם יותר.

$68 \times ??$ $+ ?? \times 64$ 6864	$42 \times ??$ $+ ?? \times 58$ 4258	$36 \times ??$ $+ ?? \times 14$ 3614
--	--	--

כמובן, משלימים ל 100

כלומר, $100 = ?? + 14$; $100 = ?? + 58$; $100 = ?? + 64$

שלב-א' ... (השלמה ל 100)

68×36 $+ ?? \times 64$ 6864	42×42 $+ ?? \times 58$ 4258	36×86 $+ ?? \times 14$ 3614
--	--	--

שלב-ב' ... (ועוד 1)

68×36 $+ 69 \times 64$ 6864	42×42 $+ 43 \times 58$ 4258	36×86 $+ 37 \times 14$ 3614
--	--	--

אבל מה עושים במקרה כזה

$68 \times ?????$ $+ ?? \times 693454$ 68693454

כמובן כדאי להכשיר עצמנו בפעולה כזו

100000 $- 642753$	הדמיון שלנו עליו לראות → כך..	9999910 $- 642753$ 357247
------------------------	-------------------------------------	-----------------------------------

רק ל 3 אנו משלימים ל 10.

ולכל יתר הספרות הנמצאות משמאל לאותו 3
אנו משלימים ל 9.

ועכשיו נוכל לגשת לפעולה זו ביתר ביטחון.

$$\begin{array}{r} 68 \times \text{?????} \\ + ?? \times 693454 \\ \hline 68693454 \end{array}$$

שלב-א'

$\begin{array}{r} 100000 \\ - 693454 \\ \hline \end{array}$	הדמיון שלנו עליו לראות → כך..	$\begin{array}{r} 9999910 \\ -6-9-3-4-5-4 \\ \hline 306546 \end{array}$
---	--	---

נמצא

$$\begin{array}{r} 68 \times 306546 \\ + ?? \times 693454 \\ \hline 68693454 \end{array}$$

שלב-ב'

$$\begin{array}{r} 68 \times 306546 \\ + 69 \times 693454 \\ \hline 68693454 \end{array}$$

עוד תרגיל לחיסור

ואיך צריך להיראות (בדמיון).

$\begin{array}{r} 10000000 \\ - 6475903 \\ \hline 3524097 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9999910 \\ -6-4-7-5-9-0-3 \\ \hline 3524097 \end{array}$
--	--

שלב מתקדם.

אנו כבר הגענו להצליח זה

$$\begin{array}{r} 42 \times 69 \\ + 43 \times 31 \\ \hline 4231 \end{array}$$

ואנו זוכרים את ההסבר שלנו

בוודאי זוכרים. הנה ... כך מסתדרים.

$\begin{array}{r} 42 \times 69 \\ 42 \times 31 \\ + 01 \times 31 \\ \hline 4231 \end{array}$	וכאילו כך ⇒	$\begin{array}{r} 42 \times 100 \\ + 01 \times 31 \\ \hline 4231 \end{array}$
--	----------------------------	---

אבל הפעם, אנו נסתכל על זה מזווית אחרת.

כלומר, הפעם אנו מתחילים מכאן...

$$\begin{array}{r} 42 \times 100 \\ + 01 \times 31 \\ \hline 4231 \end{array}$$

להוסיף ולגרוע במידת האפשר!

אנו יכולים להתחיל כך

$$\begin{array}{r} 42 \times 100 \\ + 01 \times 31 \\ \hline 4231 \end{array}$$

ואנו נעשה שינוי

ולהמשיך

$$\begin{array}{r} 42 \times 69 \\ + 43 \times 31 \\ \hline 4231 \end{array}$$

ל 01 הוספנו 42
הצרכנו לחסר
31 מ 100

אותו צעד פעם נוספת.

$\begin{array}{r} 42 \times 100 \\ + 01 \times 31 \\ \hline 4231 \end{array}$	$\begin{array}{r} 42 \times 69 \\ + 43 \times 31 \\ \hline 4231 \end{array}$	$\begin{array}{r} 42 \times 38 \\ + 85 \times 31 \\ \hline 4231 \end{array}$	ואם רוצים עוד צעד →	$\begin{array}{r} 42 \times 07 \\ + 127 \times 31 \\ \hline 4231 \end{array}$
ואנו נעשה שינוי	ל 01 הוספנו 42 הצרכנו לחסר 31 מ 100	ל 43 הוספנו 42 הצרכנו לחסר 31 מ 69		ל 85 הוספנו 42 הצרכנו לחסר 31 מ 38

עוד תרגיל

$\begin{array}{r} 36 \times 100 \\ + 01 \times 14 \\ \hline 3614 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \times 86 \\ + 37 \times 14 \\ \hline 3614 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \times 72 \\ + 73 \times 14 \\ \hline 3614 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \times 58 \\ + 109 \times 14 \\ \hline 3614 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \times 44 \\ + 145 \times 14 \\ \hline 3614 \end{array}$
ואנו נעשה שינוי	ל 01 הוספנו 36 הצרכנו לחסר 14 מ 100	ל 37 הוספנו 36 הצרכנו לחסר 14 מ 86	ל 73 הוספנו 36 הצרכנו לחסר 14 מ 72	ל 109 הוספנו 36 הצרכנו לחסר 14 מ 58

עוד תרגיל

28×83 $+ 29 \times 17$ 2817	28×66 $+ 57 \times 17$ 2817	28×49 $+ 85 \times 17$ 2817	28×32 $+ 113 \times 17$ 2817	28×15 $+ 141 \times 17$ 2817
ואנו נעשה שינוי	ל 29 הוספנו 28 הצרכנו לחסר 83 מ 17	ל 57 הוספנו 28 הצרכנו לחסר 66 מ 17	ל 85 הוספנו 28 הצרכנו לחסר 49 מ 17	ל 113 הוספנו 28 הצרכנו לחסר 32 מ 17

ובכל מקרה, אנו יכולים לקרוא אותה התשובה.

$$\begin{array}{r} 28 \times ** \\ + ** \times 17 \\ \hline 2817 \end{array}$$

עוד תרגיל

17×100 $+ 01 \times 22$ 1722	17×78 $+ 18 \times 22$ 1722	17×56 $+ 35 \times 22$ 1722	17×34 $+ 52 \times 22$ 1722	17×12 $+ 69 \times 22$ 1722
ואנו נעשה שינוי	ל 01 הוספנו 17 הצרכנו לחסר 100 מ 22	ל 18 הוספנו 17 הצרכנו לחסר 78 מ 22	ל 35 הוספנו 17 הצרכנו לחסר 56 מ 22	ל 52 הוספנו 17 הצרכנו לחסר 34 מ 22
$100 - 22 = 78$ $78 - 22 = 56$ $56 - 22 = 34$		$17 + 1 = 18$ $17 + 18 = 35$ $17 + 35 = 52$ $17 + 52 = 69$		

ובכל מקרה, אנו יכולים לקרוא אותה התשובה.

$$\begin{array}{r} 17 \times ** \\ + ** \times 22 \\ \hline \end{array}$$

לשים לב איך זה פועל?

$17 + 1 = 18$	$100 - 22 = 78$
$17 + 18 = 35$	$78 - 22 = 56$
$17 + 35 = 52$	$56 - 22 = 34$
$17 + 52 = 69$	$34 - 22 = 12$

רגע! ... לא להתבלבל!

$$\begin{array}{r} 17 \times ? \\ + 18 \times 2 \\ \hline 1702 \end{array}$$

בשביל לקרוא התשובה 1702 צריך שיהיה 02 ולא כאילו יש לנו לקרוא 172. עם צד ימין כזה "02" עושים $98 = 2 - 100$

$$\begin{array}{r} 17 \times 98 \\ + 18 \times 02 \\ \hline 1702 \end{array}$$

ההערה, שלא לשכוח ה 0 לשמאל ה 02.

ומה הלאה?
נא לפענח לי את הפעולות האלו!

48×73	18×28
$+ 73 \times 18$	$+ 28 \times 48$
4818	1848

- אני הייתי מגיש את זה בתור משחק,
- תבחר לך שני מספרים בסך 11
- בחרתי 8 ו 3.
- תבחר לך מכפיל
- בחרתי לכפול ב 6
- תכפול שני המספרים שלך ב 6
- $18 = 3 \times 6$; $48 = 8 \times 6$
- עכשיו נמצא אתך, צד ימין וצד שמאל למספר בן 4 ספרות, ואתה יכול אפילו לסדר מזה שני מספרים.
- בסדר! 4818 ו 1848
- אלו הם חלקי הפעולות האלו

$48 \times **$	$18 \times **$
$+ ** \times 18$	$+ ** \times 48$
4818	1848

- ועכשיו אני אעזור לך להשלים הפעולות. אתה זוכר שני המספרים הראשונים שבחרת?
- כן 8 ו 3
- עכשיו, אנו נבנה שני מספרים עם אחדות ועשרות.
- תחסר כל אחד מהמספרים שלך מ 10. ומה שתקבל יהיה לך לעשרות למספר החדש.
- בסדר! $10 - 3 = 7$ ואני בונה המספר 73. $10 - 8 = 2$ ואני בונה המספר 28.
- כמובן כי קבלת שני מספרים שסך הספרות לכל מספר = 10. $(10 = 8 + 2 = 7 + 3)$
- עכשיו יש אתך 28 ו 73 (הסך שלהם 101) ואנו צריכים להגיע ל 1848 ו 4818.
- תמלא, הקטן לקטן והגדול לגדול.
- כלומר, 28 איפה שיש 1848 ו 73 איפה שיש 4818.
- תמלא אותנו מספר בשני המקומות הריקים.
- וכעת תבדוק הפעולות, אם אכן הכל מדויק?

48×73	18×28
$+ 73 \times 18$	$+ 28 \times 48$
4818	1848

עד כאן התהליך!

להעיר כי $101 = 73 + 28$

- שתי ספרות בסך 11. ואף כותבים תוצאת הפעולה. ועושים מהם מספר בין 4 ספרות, כולל שני האפסים. למשל, 3 + 8 ממנו 0803 ; 0308
- ונשאר לנו למלאות שני מספרים לשתי הפעולות. שומרים על האחדות של פינת ימין למטה, ומשלימים ל 10. כלומר, 03 (פינת ימין, למטה) נותנת לנו המספר 73 (כי $10 = 7 + 3$) ; וכן הספרה השנית... 08 (פינת ימין, למטה) נותנת לנו המספר 28 (כי $10 = 2 + 8$)

$03 \times **$	3×28	8×73
$+ ** \times 08$	$+ 28 \times 08$	$+ 73 \times 03$
0308	308	803

אפשר לכפול (3 ו 8) ב... למשל, לכפול ב 6.
 6 כפול 3 = 18 ; 6 כפול 8 = 48

$\begin{array}{r} 18 \times 28 \\ + 28 \times 48 \\ \hline 1848 \end{array}$	$\begin{array}{r} 48 \times 73 \\ + 73 \times 18 \\ \hline 4818 \end{array}$
מה יש לגלות בין השורות?	
$101 = 73 + 28$	
$66 = 48 + 18$ 66 מתחלק ב 11. 1848 מתחלק ב 66 (= 28) 4818 מתחלק ב 66 (= 73)	
וכאילו אנו אומרים $(48 + 18) 28$ $(48 + 18) 73$	
ועוד, כי הספרות 3 ו 8 קיימות ב 73 ו 28	

עוד תרגיל.

לבחור! שתי ספרות בסך 11 = 2 ו 9 ; מכפיל 4 =
 מספרים חדשים $08 = 2 \times 4$, $36 = 9 \times 4$

$\begin{array}{r} 08 \times ** \\ + ** \times 36 \\ \hline 0836 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \times ** \\ + ** \times 08 \\ \hline 3608 \end{array}$
--	--

לשלב הבא!

$19 \Leftarrow 1 = 9 - 10$; $82 \Leftarrow 8 = 2 - 10$ גמרנו...

רק למלאות גדול לגדול, וקטן לקטן.

$\begin{array}{r} 08 \times 19 \\ + 19 \times 36 \\ \hline 0836 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \times 82 \\ + 82 \times 08 \\ \hline 3608 \end{array}$
--	--

ולבדוק! כי אני רוצה להיות בטוח?

$\begin{array}{r} 08 \times 19 \\ + 19 \times 36 \\ \hline 0836 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \times 82 \\ + 82 \times 08 \\ \hline 3608 \end{array}$
--	--

הערות

** ואם תרצה ללכת לפי שיטה הגיונית למצוא 19 ו 82, בבקשה!

$$82 = 44 \div 3608 = (8 + 36) \div 3608$$

$$19 = 44 \div 0836 = (8 + 36) \div 0836$$

** עוד הערה, אם רצונך לפעול עם מספרים גדולים, אתה רשאי להחליף אותם שתי ספרות שהם בסך 11, לשני מספרים שהם בסך 101, (ואף לעבוד עם 1001 וכדומה).

וכמה פעולות יכולות להיות מאותה שיטה? יש כאן 72 פעולות.

$$11 = 6+5 = 7+4 = 8+3 = 9+2 \text{ לפי}$$

חלקי ה 11, כפול 1.		חלקי ה 11, כפול 2.		חלקי ה 11, כפול 3.	
02×19 $+ 19 \times 09$ 0209	09×82 $+ 82 \times 02$ 0902	04×19 $+ 19 \times 18$ 0418	18×82 $+ 82 \times 04$ 1804	06×19 $+ 19 \times 27$ 0627	27×82 $+ 82 \times 06$ 2706
03×28 $+ 28 \times 08$ 0308	08×73 $+ 73 \times 03$ 0803	06×28 $+ 28 \times 16$ 0616	16×73 $+ 73 \times 06$ 1606	09×28 $+ 28 \times 24$ 0924	24×73 $+ 73 \times 09$ 2409
04×37 $+ 37 \times 07$ 0407	07×64 $+ 64 \times 04$ 0704	08×37 $+ 37 \times 14$ 0814	14×64 $+ 64 \times 08$ 1408	12×37 $+ 37 \times 21$ 1221	21×64 $+ 64 \times 12$ 2112
05×46 $+ 46 \times 06$ 0506	06×55 $+ 55 \times 05$ 0605	10×46 $+ 46 \times 12$ 1012	12×55 $+ 55 \times 10$ 1210	15×46 $+ 46 \times 18$ 1518	18×55 $+ 55 \times 15$ 1815

הסבר, שני מספרים בסך 101. וספרות בסך 10, יש אלו. $55 + 46$; $64 + 37$; $73 + 28$; $82 + 19$.

$$06 + 05 ; 07 + 04 ; 08 + 03 ; 09 + 02 = 11 \text{ ל}$$

$$12 + 10 ; 14 + 08 ; 16 + 06 ; 18 + 04 = 22 \text{ ל}$$

$$18 + 15 ; 21 + 12 ; 24 + 09 ; 27 + 06 = 33 \text{ ל}$$

חלקי ה 11, כפול 4.		חלקי ה 11, כפול 5.		חלקי ה 11, כפול 6.	
08×19 $+ 19 \times 36$ 0836	36×82 $+ 82 \times 08$ 3608	10×19 $+ 19 \times 45$ 1045	45×82 $+ 82 \times 10$ 4510	12×19 $+ 19 \times 54$ 1254	54×82 $+ 82 \times 12$ 5412
12×28 $+ 28 \times 32$ 1232	32×73 $+ 73 \times 12$ 3212	15×28 $+ 28 \times 40$ 1540	40×73 $+ 73 \times 15$ 4015	18×28 $+ 28 \times 48$ 1848	48×73 $+ 73 \times 18$ 4818
16×37 $+ 37 \times 28$ 1628	28×64 $+ 64 \times 16$ 2816	20×37 $+ 37 \times 35$ 2035	35×64 $+ 64 \times 20$ 3520	24×37 $+ 37 \times 42$ 2442	42×64 $+ 64 \times 24$ 4224
20×46 $+ 46 \times 24$ 2024	24×55 $+ 55 \times 20$ 2420	25×46 $+ 46 \times 30$ 2530	30×55 $+ 55 \times 25$ 3025	30×46 $+ 46 \times 36$ 3036	36×55 $+ 55 \times 30$ 3630

$$30 + 25 ; 35 + 20 ; 40 + 15 ; 45 + 10 = 55 \text{ ל} \quad 24 + 20 ; 28 + 16 ; 32 + 12 ; 36 + 08 = 44 \text{ ל}$$

$$36 + 30 ; 42 + 24 ; 48 + 18 ; 54 + 12 = 66 \text{ ל}$$

חלקי ה 11, כפול 7.		חלקי ה 11, כפול 8.		חלקי ה 11, כפול 9.	
14×19 $+ 19 \times 63$ 1463	63×82 $+ 82 \times 14$ 6314	16×19 $+ 19 \times 72$ 1672	72×82 $+ 82 \times 16$ 7216	18×19 $+ 19 \times 81$ 1881	81×82 $+ 82 \times 18$ 8118
21×28 $+ 28 \times 56$ 2156	56×73 $+ 73 \times 21$ 5621	24×28 $+ 28 \times 64$ 2464	64×73 $+ 73 \times 24$ 6424	27×28 $+ 28 \times 72$ 2772	72×73 $+ 73 \times 27$ 7227
28×37 $+ 37 \times 49$ 2849	49×64 $+ 64 \times 28$ 4928	32×37 $+ 37 \times 56$ 3256	56×64 $+ 64 \times 32$ 5632	36×37 $+ 37 \times 63$ 3663	63×64 $+ 64 \times 36$ 6336
35×46 $+ 46 \times 42$ 3542	42×55 $+ 55 \times 35$ 4235	40×46 $+ 46 \times 48$ 4048	48×55 $+ 55 \times 40$ 4840	45×46 $+ 46 \times 54$ 4554	54×55 $+ 55 \times 45$ 5445

$$48 + 40 ; 56 + 32 ; 64 + 24 ; 72 + 16 = 88 \text{ ל} \quad 42 + 35 ; 49 + 28 ; 56 + 21 ; 63 + 14 = 77 \text{ ל}$$

$$54 + 45 ; 63 + 36 ; 72 + 27 ; 81 + 18 = 99 \text{ ל}$$

השיטה הפשוטה ביותר, למלאות פעולה מאלו, כאשר הסך 11 בעינו.

חלקי ה 11, כפול 1.	
$\begin{array}{r} 02 \times 19 \\ + 19 \times 09 \\ \hline 0209 \end{array}$	$\begin{array}{r} 09 \times 82 \\ + 82 \times 02 \\ \hline 0902 \end{array}$
$\begin{array}{r} 03 \times 28 \\ + 28 \times 08 \\ \hline 0308 \end{array}$	$\begin{array}{r} 08 \times 73 \\ + 73 \times 03 \\ \hline 0803 \end{array}$
$\begin{array}{r} 04 \times 37 \\ + 37 \times 07 \\ \hline 0407 \end{array}$	$\begin{array}{r} 07 \times 64 \\ + 64 \times 04 \\ \hline 0704 \end{array}$
$\begin{array}{r} 05 \times 46 \\ + 46 \times 06 \\ \hline 0506 \end{array}$	$\begin{array}{r} 06 \times 55 \\ + 55 \times 05 \\ \hline 0605 \end{array}$

לשים לב למשולש האחדות.
למשל, יש כאן 3 אחדות ל 4.

$$\begin{array}{r} 07 \times 64 \\ + 64 \times 04 \\ \hline 0704 \end{array}$$

חזרה, להבנת התהליך!

מסדרים סך 11 בדרך זו

$$\begin{array}{r} 02 \times ** \\ + ** \times 09 \\ \hline 0209 \end{array}$$

מסתכלים בצד ימין, יש שם 9.
לעשות מספר משתי ספרות עם אחדות = 9
וביחד, שתי הספרות = 10
בשביל 9 אנו נקבל 19.

$\begin{array}{r} 02 \times 19 \\ + 19 \times 09 \\ \hline 0209 \end{array}$	ולאחר מכן לכפול לשנוי התוצאות.	$\begin{array}{r} 04 \times 19 \\ + 19 \times 18 \\ \hline 0418 \end{array}$	$\begin{array}{r} 06 \times 19 \\ + 19 \times 27 \\ \hline 0627 \end{array}$	$\begin{array}{r} 08 \times 19 \\ + 19 \times 36 \\ \hline 0836 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \times 19 \\ + 19 \times 45 \\ \hline 1045 \end{array}$	...
--	--------------------------------	--	--	--	--	-----

עוד תרגיל

$\begin{array}{r} 07 \times 64 \\ + 64 \times 04 \\ \hline 0704 \end{array}$	בצד ימין למטה יש 04 לרשום 4 באחדות ולהשלים ל 10 $64 \leftarrow 6 = 4 - 10$
--	---

במילים אחרות,

אם ה 11 שלך נראה 2 + 9 , שתי הפעולות שלך יקבלו המכפילים 82 ו 19.
אם ה 11 שלך נראה 3 + 8 , שתי הפעולות שלך יקבלו המכפילים 73 ו 28.
אם ה 11 שלך נראה 4 + 7 , שתי הפעולות שלך יקבלו המכפילים 64 ו 37.
אם ה 11 שלך נראה 5 + 6 , שתי הפעולות שלך יקבלו המכפילים 55 ו 46.

07×64 $+ 64 \times 04$ 0704	אם שייך לעשות שינוי? כן! רק לכפול ב. n. (9 = n)	63×64 $+ 64 \times 36$ 6336
07×64 $+ 64 \times 04$ 0704	אם שייך לעשות שינוי? כן! רק לכפול ב. n. (3 = n)	21×64 $+ 64 \times 12$ 2112

בלוח ה, יש לך כל הפרטים.

$$\begin{array}{r}
 02 \times 19 \\
 + 19 \times 09 \\
 \hline
 0209
 \end{array}$$

$11 = 9 + 2$ 19 ; 82					קריאה				קריאה
09 = 9 x 1 ; 02 = 2 x 1	19 ; 82	9 x 82	+	82 x 2	= 902	2 x 19	+	19 x 9	= 209
18 = 9 x 2 ; 04 = 2 x 2	19 ; 82	18 x 82	+	82 x 4	= 1804	4 x 19	+	19 x 18	= 418
27 = 9 x 3 ; 06 = 2 x 3	19 ; 82	27 x 82	+	82 x 6	= 2706	6 x 19	+	19 x 27	= 627
36 = 9 x 4 ; 08 = 2 x 4	19 ; 82	36 x 82	+	82 x 8	= 3608	8 x 19	+	19 x 36	= 836
45 = 9 x 5 ; 10 = 2 x 5	19 ; 82	45 x 82	+	82 x 10	= 4510	10 x 19	+	19 x 45	= 1045
54 = 9 x 6 ; 12 = 2 x 6	19 ; 82	54 x 82	+	82 x 12	= 5412	12 x 19	+	19 x 54	= 1254
63 = 9 x 7 ; 14 = 2 x 7	19 ; 82	63 x 82	+	82 x 14	= 6314	14 x 19	+	19 x 63	= 1463
72 = 9 x 8 ; 16 = 2 x 8	19 ; 82	72 x 82	+	82 x 16	= 7216	16 x 19	+	19 x 72	= 1672
81 = 9 x 9 ; 18 = 2 x 9	19 ; 82	81 x 82	+	82 x 18	= 8118	18 x 19	+	19 x 81	= 1881
$11 = 8 + 3$ 28 ; 73					קריאה				קריאה
08 = 8 x 1 ; 03 = 3 x 1	28 ; 73	8 x 73	+	73 x 3	= 803	3 x 28	+	28 x 8	= 308
16 = 8 x 2 ; 06 = 3 x 2	28 ; 73	16 x 73	+	73 x 6	= 1606	6 x 28	+	28 x 16	= 616
24 = 8 x 3 ; 09 = 3 x 3	28 ; 73	24 x 73	+	73 x 9	= 2409	9 x 28	+	28 x 24	= 924
32 = 8 x 4 ; 12 = 3 x 4	28 ; 73	32 x 73	+	73 x 12	= 3212	12 x 28	+	28 x 32	= 1232
40 = 8 x 5 ; 15 = 3 x 5	28 ; 73	40 x 73	+	73 x 15	= 4015	15 x 28	+	28 x 40	= 1540
48 = 8 x 6 ; 18 = 3 x 6	28 ; 73	48 x 73	+	73 x 18	= 4818	18 x 28	+	28 x 48	= 1848
56 = 8 x 7 ; 21 = 3 x 7	28 ; 73	56 x 73	+	73 x 21	= 5621	21 x 28	+	28 x 56	= 2156
64 = 8 x 8 ; 24 = 3 x 8	28 ; 73	64 x 73	+	73 x 24	= 6424	24 x 28	+	28 x 64	= 2464
72 = 8 x 9 ; 27 = 3 x 9	28 ; 73	72 x 73	+	73 x 27	= 7227	27 x 28	+	28 x 72	= 2772

11 = 7 + 4 37 ; 64					קריאה				קריאה		
07 = 7 x 1 ; 04 = 4 x 1	37 ; 64	7 x 64	+	64 x 4	=	704	4 x 37	+	37 x 7	=	407
14 = 7 x 2 ; 08 = 4 x 2	37 ; 64	14 x 64	+	64 x 8	=	1408	8 x 37	+	37 x 14	=	814
21 = 7 x 3 ; 12 = 4 x 3	37 ; 64	21 x 64	+	64 x 12	=	2112	12 x 37	+	37 x 21	=	1221
28 = 7 x 4 ; 16 = 4 x 4	37 ; 64	28 x 64	+	64 x 16	=	2816	16 x 37	+	37 x 28	=	1628
35 = 7 x 5 ; 20 = 4 x 5	37 ; 64	35 x 64	+	64 x 20	=	3520	20 x 37	+	37 x 35	=	2035
42 = 7 x 6 ; 24 = 4 x 6	37 ; 64	42 x 64	+	64 x 24	=	4224	24 x 37	+	37 x 42	=	2442
49 = 7 x 7 ; 28 = 4 x 7	37 ; 64	49 x 64	+	64 x 28	=	4928	28 x 37	+	37 x 49	=	2849
56 = 7 x 8 ; 32 = 4 x 8	37 ; 64	56 x 64	+	64 x 32	=	5632	32 x 37	+	37 x 56	=	3256
63 = 7 x 9 ; 36 = 4 x 9	37 ; 64	63 x 64	+	64 x 36	=	6336	36 x 37	+	37 x 63	=	3663
11 = 6 + 5 46 ; 55					קריאה				קריאה		
06 = 6 x 1 ; 05 = 5 x 1	46 ; 55	6 x 55	+	55 x 5	=	605	5 x 46	+	6 x 46	=	506
12 = 6 x 2 ; 10 = 5 x 2	46 ; 55	12 x 55	+	55 x 10	=	1210	10 x 46	+	12 x 46	=	1012
18 = 6 x 3 ; 15 = 5 x 3	46 ; 55	18 x 55	+	55 x 15	=	1815	15 x 46	+	18 x 46	=	1518
24 = 6 x 4 ; 20 = 5 x 4	46 ; 55	24 x 55	+	55 x 20	=	2420	20 x 46	+	24 x 46	=	2024
30 = 6 x 5 ; 25 = 5 x 5	46 ; 55	30 x 55	+	55 x 25	=	3025	25 x 46	+	30 x 46	=	2530
36 = 6 x 6 ; 30 = 5 x 6	46 ; 55	36 x 55	+	55 x 30	=	3630	30 x 46	+	36 x 46	=	3036
42 = 6 x 7 ; 35 = 5 x 7	46 ; 55	42 x 55	+	55 x 35	=	4235	35 x 46	+	42 x 46	=	3542
48 = 6 x 8 ; 40 = 5 x 8	46 ; 55	48 x 55	+	55 x 40	=	4840	40 x 46	+	48 x 46	=	4048
54 = 6 x 9 ; 45 = 5 x 9	46 ; 55	54 x 55	+	55 x 45	=	5445	45 x 46	+	54 x 46	=	4554

03 x 28 + 28 x 08 0308	ולאחר מכן לכפול לשנוי התוצאות.	06 x 28 + 28 x 16 0616	09 x 28 + 28 x 24 0924	12 x 28 + 28 x 32 1232	15 x 28 + 28 x 40 1540	...
08 x 73 + 73 x 03 0803	ולאחר מכן לכפול לשנוי התוצאות.	16 x 73 + 73 x 06 1606	24 x 73 + 73 x 09 2409	32 x 73 + 73 x 12 3212	40 x 73 + 73 x 15 4015	...

04 x 37 + 37 x 07 0407	ולאחר מכן לכפול לשנוי התוצאות.	08 x 37 + 37 x 14 0814	12 x 37 + 37 x 21 1221	16 x 37 + 37 x 28 1628	20 x 37 + 37 x 35 2035	...
07 x 64 + 64 x 04 0704	ולאחר מכן לכפול לשנוי התוצאות.	14 x 64 + 64 x 08 1408	21 x 64 + 64 x 12 2112	28 x 64 + 64 x 16 2816	35 x 64 + 64 x 20 3520	...

עוד שינויים!

כאן האלכסון של 11, ממש בכיוון ההופכי!

הידעת! כי אם תיקח שתי ספרות בסך 11, ותוסיף לכפל של שתי ספרות אלו, הריבוע של אחת מהן, תקבל תשובה, שיש לצפות לה. כמו למשל, $11 = 7 + 4$, $28 = 7 \times 4$; נוסיף ל 28 4^2 או 7^2 ומה לפי דעתך תהיה התשובה?

$$28 + 4^2 = 44; 28 + 7^2 = 77$$

7×4	4×7
$+ 7 \times 7$	$+ 4 \times 4$
77	44

אותו תרגיל עם 101 תחליף 11. $(101 = 73 + 28)$

$$28 \times 73 = 2044; 2044 + 28^2 = 2828; 2044 + 73^2 = 7373$$

73×28	28×73
$+ 73 \times 73$	$+ 28 \times 28$
7373	2828

האם שייך להביא שינויים לשיטה ההיא?

9×2 $+ 9 \times 9$ 99	9×3 $+ 8 \times 9$ 99	9×4 $+ 7 \times 9$ 99	9×5 $+ 6 \times 9$ 99	9×6 $+ 5 \times 9$ 99	9×7 $+ 4 \times 9$ 99	
2×9 $+ 2 \times 2$ 22	2×8 $+ 3 \times 2$ 22	2×7 $+ 4 \times 2$ 22	2×6 $+ 5 \times 2$ 22	2×5 $+ 6 \times 2$ 22	2×4 $+ 7 \times 2$ 22	

היות כל... $11 = 5 + 6 = 4 + 7 = 3 + 8 = 2 + 9$

8×2 $+ 9 \times 8$ 88	8×3 $+ 8 \times 8$ 88	8×4 $+ 7 \times 8$ 88	8×5 $+ 6 \times 8$ 88	8×6 $+ 5 \times 8$ 88	8×7 $+ 4 \times 8$ 88	
3×9 $+ 2 \times 3$ 33	3×8 $+ 3 \times 3$ 33	3×7 $+ 4 \times 3$ 33	3×6 $+ 5 \times 3$ 33	3×5 $+ 6 \times 3$ 33	3×4 $+ 7 \times 3$ 33	

7×2 $+ 9 \times 7$ 77	7×3 $+ 8 \times 7$ 77	7×4 $+ 7 \times 7$ 77	7×5 $+ 6 \times 7$ 77	7×6 $+ 5 \times 7$ 77	7×7 $+ 4 \times 7$ 77	
4×9 $+ 2 \times 4$ 44	4×8 $+ 3 \times 4$ 44	4×7 $+ 4 \times 4$ 44	4×6 $+ 5 \times 4$ 44	4×5 $+ 6 \times 4$ 44	4×4 $+ 7 \times 4$ 44	

6×2 $+ 9 \times 6$ 66	6×3 $+ 8 \times 6$ 66	6×4 $+ 7 \times 6$ 66	6×5 $+ 6 \times 6$ 66	6×6 $+ 5 \times 6$ 66	6×7 $+ 4 \times 6$ 66	
5×9 $+ 2 \times 5$ 55	5×8 $+ 3 \times 5$ 55	5×7 $+ 4 \times 5$ 55	5×6 $+ 5 \times 5$ 55	5×5 $+ 6 \times 5$ 55	5×4 $+ 7 \times 5$ 55	

אפשרויות שונות מיוסדות על סך 2 ספרות = 11
ניתן לעשות באותה שיטה, לכל 2 מספרים בסך 101.
גם כאן, האלכסון של 11, ממש בכיוון ההופכי!

$\begin{array}{r} 1 \times 2 \\ + 9 \times 1 \\ \hline = 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 3 \\ + 8 \times 1 \\ \hline = 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 4 \\ + 7 \times 1 \\ \hline = 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 \times 5 \\ + 6 \times 1 \\ \hline = 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \times 2 \\ + 9 \times 9 \\ \hline = 99 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \times 3 \\ + 8 \times 9 \\ \hline = 99 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \times 4 \\ + 7 \times 9 \\ \hline = 99 \end{array}$	$\begin{array}{r} 9 \times 5 \\ + 6 \times 9 \\ \hline = 99 \end{array}$
$\begin{array}{r} 2 \times 2 \\ + 9 \times 2 \\ \hline = 22 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \times 3 \\ + 8 \times 2 \\ \hline = 22 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \times 4 \\ + 7 \times 2 \\ \hline = 22 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \times 5 \\ + 6 \times 2 \\ \hline = 22 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 2 \\ + 9 \times 8 \\ \hline = 88 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 3 \\ + 8 \times 8 \\ \hline = 88 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 4 \\ + 7 \times 8 \\ \hline = 88 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 5 \\ + 6 \times 8 \\ \hline = 88 \end{array}$
$\begin{array}{r} 3 \times 2 \\ + 9 \times 3 \\ \hline = 33 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \times 3 \\ + 8 \times 3 \\ \hline = 33 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \times 4 \\ + 7 \times 3 \\ \hline = 33 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \times 5 \\ + 6 \times 3 \\ \hline = 33 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 2 \\ + 9 \times 7 \\ \hline = 77 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 3 \\ + 8 \times 7 \\ \hline = 77 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 4 \\ + 7 \times 7 \\ \hline = 77 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 \times 5 \\ + 6 \times 7 \\ \hline = 77 \end{array}$
$\begin{array}{r} 4 \times 2 \\ + 9 \times 4 \\ \hline = 44 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \times 3 \\ + 8 \times 4 \\ \hline = 44 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \times 4 \\ + 7 \times 4 \\ \hline = 44 \end{array}$	$\begin{array}{r} 4 \times 5 \\ + 6 \times 4 \\ \hline = 44 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 2 \\ + 9 \times 6 \\ \hline = 66 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 3 \\ + 8 \times 6 \\ \hline = 66 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 4 \\ + 7 \times 6 \\ \hline = 66 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 5 \\ + 6 \times 6 \\ \hline = 66 \end{array}$
$\begin{array}{r} A \times B' \\ + A' \times B \\ \hline = AB \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \times 5 \\ + 6 \times 5 \\ \hline = 55 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \times 4 \\ + 7 \times 5 \\ \hline = 55 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \times 3 \\ + 8 \times 5 \\ \hline = 55 \end{array}$	$\begin{array}{r} 5 \times 2 \\ + 9 \times 5 \\ \hline = 55 \end{array}$	$\begin{array}{r} A \times B' \\ + A' \times B \\ \hline = AB \end{array}$		

$$A = B$$

$$A' + B' = 11 \text{ או } [101]$$

וגם כאן אתה רשאי להחליף הסך של 11 לסך 101

$$\text{למשל, } 101 = 28 + 73$$

לבחור שני מספרים שונים בסך 101.

$\begin{array}{r} 73 \times 28 \\ + 73 \times 73 \\ \hline 7373 \end{array}$	$\begin{array}{r} 28 \times 73 \\ + 28 \times 28 \\ \hline 2828 \end{array}$
--	--

רק לא לשכוח להתאים 3 מספרים.

$\begin{array}{r} 74 \times 27 \\ + 74 \times 74 \\ \hline 7474 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \times 74 \\ + 27 \times 27 \\ \hline 2727 \end{array}$
--	--

$$101 = 35 + 66$$

$\begin{array}{r} 74 \times 66 \\ + 35 \times 74 \\ \hline 7474 \end{array}$	$\begin{array}{r} 27 \times 35 \\ + 66 \times 27 \\ \hline 2727 \end{array}$
--	--

כמה שאתה מחסר מזה, אתה מוסיף לזה.

$\begin{array}{r} 74 \times 27 \\ + 74 \times 74 \\ \hline 7474 \end{array}$	חסרנו סתם מספר 39 $74 - 39 = 35$	$\begin{array}{r} 74 \times ?? \\ + 35 \times 74 \\ \hline 7474 \end{array}$	עלינו להוסיף 39 $27 + 39 = 66$	$\begin{array}{r} 74 \times 66 \\ + 35 \times 74 \\ \hline 7474 \end{array}$
--	--	--	--------------------------------------	--

$\begin{array}{r} 27 \times 74 \\ + 27 \times 27 \\ \hline 2727 \end{array}$	הוספנו מה שחסרנו 39 $27 + 39 = 66$	$\begin{array}{r} 27 \times ?? \\ + 66 \times 27 \\ \hline 2727 \end{array}$	עלינו לחסר 39 $74 - 39 = 35$	$\begin{array}{r} 27 \times 35 \\ + 66 \times 27 \\ \hline 2727 \end{array}$
--	--	--	------------------------------------	--

עוד שינויים! ועוד שליטה על מה שהולך!

- גם זה נגיש בתור משחק!
- בחר לך שני מספרים ללא תנאי (כעת נגביל עצמנו בשני מספרים, פחות ממאה)
- בחרתי 23 ו 79
- תעשה מהם מספר שלם אחד מימין ואחד משמאל.
- כן! עשיתי גם כך וגם כך. 7923 ו 2379
- אתה יכול למסור לי המספר החדש?
- הנה אחד מהם, 7923.
- בבקשה תסתכל

$\begin{array}{r} 79 \times ** \\ + ** \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$	$\begin{array}{r} 79 \times 8 \\ + 317 \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$
--	--

- מה דעתך על זה?
- ואני יכול לעשות עוד כמה שנויים.

$\begin{array}{r} 79 \times ** \\ + ** \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$	$\begin{array}{r} 79 \times 8 \\ + 317 \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$	$\begin{array}{r} 79 \times 31 \\ + 238 \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$	$\begin{array}{r} 79 \times 54 \\ + 159 \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$	$\begin{array}{r} 79 \times 77 \\ + 80 \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$
--	--	---	---	--

אך לא כדאי להתעסק בפעולה השלילית.

$\begin{array}{r} 23 \times ** \\ + ** \times 79 \\ \hline 2379 \end{array}$	$\begin{array}{r} 23 \times 58- \\ + 47 \times 79 \\ \hline 2379 \end{array}$
--	---

הסבר!

$\begin{array}{r} 79 \times ** \\ + ** \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$	$\begin{array}{r} 79 \times 8 \\ + 317 \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$
--	--

הבה ונקרא להם שמות.

משמאל, 79 בשם A

מימין, 23 בשם B

למטה משמאל, A'

למעלה מימין, B'

וגם n לשם מכפיל.

$\begin{array}{r} A \times B' \\ + A' \times B \\ \hline **** \end{array}$
--

אתה בוחר A ו B איזה מספרים שתרצה,

רק מומלץ כי B כלומר ה 23 של כאן, שיהיה למטה מ 50 ואף אם אפשר למטה מ 25
למה? בשביל שלא להגיע בתהליך ל B' שלילי.

איך למצוא A' ?
 הכל לפי המכפיל שבחרת.
 אם בחרת במכפיל $n = 2$, אכן הנוסחה היא,

$$A' = An + 1$$

$$A' = A2 + 1$$

היות ו $A = 79$ אז

$$A' = (2 * 79) + 1 = 159$$

$\begin{array}{r} 79 \times 54 \\ + 159 \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$

לזכור כי $A' = An + 1$

איך למצוא B' ?

100 פחות (Bn)

$$B' = 100 - (2 * 23) = 54$$

$\begin{array}{r} 79 \times 54 \\ + 159 \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$

לזכור כי $B' = 100 - Bn$

וכאשר $n = 3$ מה עושים?

$$A' = (79 * 3) + 1 = 238$$

$$B' = 100 - (23 * 3) = 31$$

מוצאים
ומוצאים גם

$\begin{array}{r} 79 \times 31 \\ + 238 \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$

וכאשר $n = 4$ מה עושים?

$$A' = (79 * 4) + 1 = 317$$

$$B' = 100 - (23 * 4) = 8$$

מוצאים
ומוצאים גם

$\begin{array}{r} 79 \times 8 \\ + 317 \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$
--

וכאשר $n = 5$ מה עושים?

$$A' = (79 * 5) + 1 = 396$$

$$B' = 100 - (23 * 5) = -15$$

מוצאים
ומוצאים גם

$\begin{array}{r} 79 \times 15- \\ + 396 \times 23 \\ \hline 7923 \end{array}$
--

ולא כדאי לעסוק אתו, הגם שהוא צודק.
 לנו, זה לא משתלם.

ומובן כי אפשר להתחיל התרגיל בבחירת מספר בן 5 ספרות, למשל 54321 ולחלק אותו לשנים
(בהתחשב כי צד ימין יהי הכי פחות)

$$\begin{array}{r} 543 \times ** \\ + ** \times 21 \\ \hline 54321 \end{array}$$

נקבע כי $n = 4$

$$A' = (543 \times 4) + 1 = 2173$$

$$B' = 100 - (21 \times 4) = 16$$

מוצאים
ומוצאים גם

$$\begin{array}{r} 543 \times 16 \\ + 2173 \times 21 \\ \hline 54321 \end{array}$$

תרגיל ללומד ! ליצור מצב שנצטרך להשתמש עם הנוסחה הזו.

$$B' = 1000 - B_n$$

עוד הסבר פשוט יותר! (ללא מכפיל)

$\begin{array}{r} 49 \times 100 \\ + 01 \times 23 \\ \hline 4923 \end{array}$	$\begin{array}{r} 1 + 49 \\ 100 - 23 \end{array}$	$\begin{array}{r} 49 \times 77 \\ + 50 \times 23 \\ \hline 4923 \end{array}$	$\begin{array}{r} 50 + 49 \\ 77 - 23 \end{array}$	$\begin{array}{r} 49 \times 54 \\ + 99 \times 23 \\ \hline 4923 \end{array}$	$\begin{array}{r} 99 + 49 \\ 54 - 23 \end{array}$	$\begin{array}{r} 49 \times 31 \\ + 148 \times 23 \\ \hline 4923 \end{array}$
---	---	--	---	--	---	---

זה ממש מה שראינו למעלה, רק עם נוסחאות.

$\begin{array}{r} 36 \times 100 \\ + 01 \times 14 \\ \hline 3614 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \times 86 \\ + 37 \times 14 \\ \hline 3614 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \times 72 \\ + 73 \times 14 \\ \hline 3614 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \times 58 \\ + 109 \times 14 \\ \hline 3614 \end{array}$	$\begin{array}{r} 36 \times 44 \\ + 145 \times 14 \\ \hline 3614 \end{array}$
אנו נעשה שינוי	ל 01 הוספנו 36 הצרכנו לחסר 14 מ 100	ל 37 הוספנו 36 הצרכנו לחסר 14 מ 86	ל 73 הוספנו 36 הצרכנו לחסר 14 מ 72	ל 109 הוספנו 36 הצרכנו לחסר 14 מ 58

עוד שינויים!

גישה שונה לעניין!

$$\begin{array}{r} A \times B' \\ + A' \times B \\ \hline **** \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \times * \\ + * \times 2 \\ \hline 42 \end{array}$$

איך מסתדרים כאשר

$$4 = \text{פעמים } 2$$

$$A = 2B, \text{ כלומר,}$$

נעזרים ב 21. כלומר אתה קובע כמה זה B', ואתה מחסר פעמיים B' מ 21.

$\begin{array}{r} 4 \times 5 \\ + * \times 2 \\ \hline 42 \end{array}$	אני קבעתי כי $B' = 5$ או $21 - (2 \times 5) = 11$	$\begin{array}{r} 4 \times 5 \\ + 11 \times 2 \\ \hline 42 \end{array}$
--	--	---

תבדוק כי הנך מקבל 42!

כאשר $B' = 1$ או 2 או 3 או 4 או ...

$$A' = 21 - (2 \times 1) = 19$$

$$A' = 21 - (2 \times 2) = 17$$

$$A' = 21 - (2 \times 3) = 15$$

$$A' = 21 - (2 \times 4) = 13$$

$$A' = 21 - (2 \times 5) = 11$$

$$A' = 21 - (2 \times 6) = 09$$

$$A' = 21 - (2 \times 7) = 07$$

$$A' = 21 - (2 \times 8) = 05$$

$$A' = 21 - (2 \times 9) = 03$$

$\begin{array}{r} 6 \times 1 \\ + 19 \times 3 \\ \hline 63 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 2 \\ + 17 \times 3 \\ \hline 63 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 3 \\ + 15 \times 3 \\ \hline 63 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 4 \\ + 13 \times 3 \\ \hline 63 \end{array}$
---	---	---	---

$\begin{array}{r} 6 \times 5 \\ + 11 \times 3 \\ \hline 63 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 6 \\ + 9 \times 3 \\ \hline 63 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 7 \\ + 7 \times 3 \\ \hline 63 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 8 \\ + 5 \times 3 \\ \hline 63 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6 \times 9 \\ + 3 \times 3 \\ \hline 63 \end{array}$
---	--	--	--	--

אני הבאתי כאן 6 = פעמיים 3.

אבל יכולים להחליף מספרים אלו בכל אפשרויות.

$\begin{array}{r} 8 \times 1 \\ + 19 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 2 \\ + 17 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 3 \\ + 15 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 4 \\ + 13 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$
---	---	---	---

$\begin{array}{r} 8 \times 5 \\ + 11 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 6 \\ + 9 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 7 \\ + 7 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 8 \\ + 5 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 9 \\ + 3 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$
---	--	--	--	--

ואפילו אם נרחיק לכת, ונשתמש במקום 21, ב 201 או ב 2001, וכו'

$\begin{array}{r} 84 \times 41 \\ + 119 \times 42 \\ \hline 8442 \end{array}$	$\begin{array}{r} 84 \times 42 \\ + 117 \times 42 \\ \hline 8442 \end{array}$	$\begin{array}{r} 84 \times 43 \\ + 115 \times 42 \\ \hline 8442 \end{array}$	$\begin{array}{r} 84 \times 44 \\ + 113 \times 42 \\ \hline 8442 \end{array}$	→ ובן הלאה
---	---	---	---	---------------

כאן יש לנו $84 = 42 \times 2$

קבענו (בחרנו, סתם) כי למעלה מימין = 41, 42, 43, 44.

וצריך למצוא למטה משמאל, בהתאם לאותו 41, 42, 43, 44 שהבאנו משלנו.

$$201 - (2 \times 41) = 119$$

$$201 - (2 \times 42) = 117$$

$$201 - (2 \times 43) = 115$$

$$201 - (2 \times 44) = 113$$

ועוד פרט חשוב!
ראינו שאין לשנות 84 ו 42 ולקבל תמיד 8442.

$$\begin{array}{r} A \times B' \\ + A' \times B \\ \hline **** \end{array}$$

כלומר, שמרנו על A ו B לכל הדרך, ועשינו השינויים אך ורק ב A' ו B'.
בואו ונבקש לעשות ההפך, כלומר לבל לשנות A' ו B'.

$\begin{array}{r} 8 \times 6 \\ + 9 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \times 6 \\ + 9 \times 5 \\ \hline 105 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \times 6 \\ + 9 \times 6 \\ \hline 126 \end{array}$	$\begin{array}{r} 14 \times 6 \\ + 9 \times 7 \\ \hline 147 \end{array}$	$\begin{array}{r} 16 \times 6 \\ + 9 \times 8 \\ \hline 168 \end{array}$
--	--	--	--	--

ועוד פרט חשוב!

אנו קבענו, לבחור מספר מה מ 1 ועד 9 בשביל B'
ואז מוצאים

$$A' = 21 - (B' \times 2)$$

אבל, מה היא הנוסחה, אם רוצים לבחור ב A' קודם?
אנו צריכים לבחור מספר אי-זוגי.

למשל, קבענו כי $A' = 9$

איך להגיע ל B'?

$$B' = (21 - A') \div 2$$

$$B' = (21 - 9) \div 2 = 6$$

$\begin{array}{r} 8 \times ? \\ + 9 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \times 6 \\ + 9 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$
--	--

לפי שיטה זו, A' צריך להיות תמיד אי-זוגי, שאחר החיסור יוכל להתחלק ב 2.
נמצאו בידינו שתי נוסחאות

$$A' = 21 - (B' \times 2)$$

$$B' = (21 - A') \div 2$$

בכלל אין להן שייכות עם A ו B.

מעניין לעניין באותו עניין.

אם הצלחנו לעשות פעולה כזו

הבלעדיות: סך האחדות = 10 ; בעשרות, האחד עולה על חברו ב +1.

$$\begin{array}{r} 8 \times 6 \\ + 9 \times 4 \\ \hline 84 \end{array}$$

למה לא נעשה מזה פעולת כפל ונבטיח לעצמנו חלק מפתרון הפעולה?

$$\begin{array}{r} 84 \\ \times 96 \\ \hline 7224 \\ \hline 840 \\ \hline 8064 \end{array}$$

ולא עוד אלא שפעולה כזאת סובלת להתגלגל.

8 4		9 8		6 9		4 6
x 9 6		x 6 4		x 4 8		x 8 9
72 24	↻	54 32	↻	24 72	↻	32 54
8 40		8 40		8 40		8 40
80 64		62 72		33 12		40 94

ולא עוד אלא, אפשר לגלגל בכיוון ההופכי.

8 4		8 9		9 6		6 4
x 9 6		x 4 6		x 8 4		x 9 8
72 24	↻	32 54	↻	72 24	↻	54 32
8 40		8 40		8 40		8 40
80 64		40 94		80 64		62 72

הגם שבסופו של דבר הן אותן פעולות.

מה כן בטוח?

כי כפל המשולבות נותן סך 840

$$84 = (4 \times 9) + (8 \times 6)$$

וכן כולם... כלומר, כל הפעולות שעברו עלינו,

אפשר לגלות בהם הבלעדיות הזו.

8 4	8 4	9 8	6 9	4 6
x 9 6	x 9 6	x 6 4	x 4 8	x 8 9
72 24	72 24	54 32	24 72	32 54
4 8	8 40	3 6	4 8	3 6
3 6	80 64	4 8	3 6	4 8
8 40		8 40	8 40	8 40
80 64		62 72	33 12	40 94

אבל הרווחנו נוסחה.

$$A' = A_n + 1$$

$$B' = 100 - B_n$$

לאמתו של דבר הנוסחה צריכה להיות כך..

$$A' = A_n + 1$$

$$B' = 10^x - B_n$$

ומספר האפסים יש להתאים למספר הספרות.

הנה התרגיל

357 x ?B'	357 x 498
+ ?A' x 251	+ 715 x 251
357251	357251

איך למצוא A' ? (נניח 2=n)

$$A' = A_n + 1$$

$$A' = (357 * 2) + 1 = 715$$

איך למצוא B' ? (נניח $3=x$)

$$B' = 10^x - B_n$$

$$1000 - (2 * 251) = 498$$

251 יש בו 3 ספרות, השתמשנו ב 3 אפסים.

$\begin{array}{r} 357 \times ? \\ + 715 \times 251 \\ \hline 357251 \end{array}$	$\begin{array}{r} 357 \times 498 \\ + 715 \times 251 \\ \hline 357251 \end{array}$
--	--

ויש עוד אפשרויות...

לשים לב, כאן יש פעולת חיסור.

$\begin{array}{r} 43 \times 024 \\ - 43 \times 24 \\ \hline 4324 \times 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \times 124 \\ - 42 \times 24 \\ \hline 4324 \times 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \times 242 \\ - 41 \times 24 \\ \hline 4324 \times 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \times 324 \\ - 40 \times 24 \\ \hline 4324 \times 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \times 424 \\ - 39 \times 24 \\ \hline 4324 \times 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 43 \times 524 \\ - 38 \times 24 \\ \hline 4324 \times 5 \end{array}$
--	--	--	--	--	--

עוד דוגמה...

$\begin{array}{r} 56 \times 047 \\ - 56 \times 47 \\ \hline 5647 \times 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 56 \times 147 \\ - 55 \times 47 \\ \hline 5647 \times 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 56 \times 247 \\ - 54 \times 47 \\ \hline 5647 \times 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 56 \times 347 \\ - 53 \times 47 \\ \hline 5647 \times 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 56 \times 447 \\ - 52 \times 47 \\ \hline 5647 \times 4 \end{array}$	$\begin{array}{r} 56 \times 547 \\ - 51 \times 47 \\ \hline 5647 \times 5 \end{array}$
--	--	--	--	--	--

ויש עוד אפשרויות...

לשים לב, כאן נגיע לפעולת ריבוע.

$\begin{array}{r} 567685969 \\ - 432314031 \\ \hline 135371938 \end{array}$

בחיסור רגיל קבלנו **135371938** ואם אותם שני המספרים יהיו בריבוע, נקבל אותה תוצאה עם אפסים בהתאם.

$\begin{array}{r} 567685969^2 \\ - 432314031^2 \\ \hline 135371938000000000 \end{array}$
--

תרגיל קטן יותר

לשים לב $100 = 69 + 31$

$\begin{array}{r} 69 \\ - 31 \\ \hline 38 \end{array}$	$\begin{array}{r} 69^2 \\ - 31^2 \\ \hline 3800 \end{array}$
--	--

ואם זה בריבוע!
ועוד דוגמה ברמה-ב
כאן לא כל הספרות התחתונות, יותר קטנות מהעליונות.

$$\begin{array}{r} 82462 \\ - 17538 \\ \hline 64924 \end{array}$$

לשים לב $82462 + 17538 = 100000$ (מספר עגול)
בחיסור רגיל קבלנו **64924**, ואם אותם שני המספרים יהיו בריבוע, נקבל אותה תוצאה עם אפסים בהתאם.

$$\begin{array}{r} 82462^2 \\ - 17538^2 \\ \hline 6492400000 \end{array}$$

מה הוא התהליך?

לגשת ישירות לפעולה פשוטה $82462 = 17538 - 100000$
ולעשות מזה פעולת חיסור פשוטה (ללא שום ריבוע) $64924 = 17538 - 82462$
וכמובן, בפעולה הבאה, עושים בריבוע $? = 17538^2 - 82462^2$
ומקבלים אותה תשובה, בתוספת אפסים בהתאם. $64924\ 00000 = 17538^2 - 82462^2$
