

דפים אלו מגישות המשולש של פסקל לכל גווניו.
 וכמובן כולל גם ליקוטים מהאינטרנט.
 אך בעיקר, כולל העבודה החדשנית
 דברים שלא חדשו אותם אחרים.
 אתם מעצמכם תחושו שיש קסם מה בעולם המספרים.

ככל פצט אנו נראה
 חלק א'
 פתיחת הצניין,
 ומאנו נצבור לחלק שאנו רוצים לעסוק בו.
 כי חלק א'
 צניינו להסביר היסוד שבו נבנה לוח פסקל.

עד שנגיע לדברים עמוקים יותר, יש להתחיל מההתחלה.
 והנה המשולש של פסקל, ולמה נקרא משולש.

					1						
				1		1					
			1		2		1				
		1		3		3		1			
	1		4		6		4		1		
1		5		10		10		5		1	
1	6		15		20		15		6		1

$$4 + 6 = 10$$

המשולש של פסקל.

חלק I

אכן כך הוא הבניין של משולש זה:
מתחילים ב "1" משני צידי המשולש.

						1						
					1		1					
				1				1				
			1						1			
		1								1		
	1										1	
1												1

ואז, מתחילים לחבר כל שני תאים (באופק)
ולכתוב הסך למטה באמצע.

																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																		</
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

והנה המשולש של פסקל, ולמה נקרא משולש.

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

הסך של שני תאים צמודים, נמצא למטה (באמצע) מתחתיהם.

וכן לימדונו בכיתה אודות משולש זה!

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
1		6		15		20		15		6		1

וזה מה שלמדנו :

בשביל למצוא הסך 10 של שני התאים 6 ו 4,
יש להסתכל במספר (10) הנמצא באמצע מתחתיהם.

אבל כשהן בלוח הזה שאינם בצורת משולש..
ה 10 נמצא מתחת לשני התאים (מימין) $10 = 6 + 4$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

אנו ניעזר באותיות.

C לעמודה, **L** לשורה.

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁	C ₁₂
L ₀	1												
L ₁	1	1											
L ₂	1	2	1										
L ₃	1	3	3	1									
L ₄	1	4	6	4	1								
L ₅	1	5	10	10	5	1							
L ₆	1	6	15	20	15	6	1						
L ₇	1	7	21	35	35	21	7	1					
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
L ₉	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
L ₁₀	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
L ₁₁	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

יש להבחין בשני מהלכים שווים בערכם.

(ואילו היו המספרים נשארים בצורת משולש, היינו גם רואים הסימטריות)

אך בלוח זה אנו מוצאים הן מלמעלה למטה (בעמודות) והן באלכסון, אותו דבר
[למשל, בעמודה-1, מ 1 עד 8 .. הסך 36]!

									1										
								1		1									
								1	2	1									
								1	3	3	1								
								1	4	6	4	1							
								1	5	10	10	5	1						
								1	6	15	20	15	6	1					
								1	7	21	35	35	21	7	1				
								1	8	28	56	70	56	28	8	1			

פרשנות שנית שראינו בכיתה.
וזו הוגש לנו לאחר שהתחלנו ללמוד אלגברה.

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$$

1	1					$1a^1 + 1b^1$
1	2	1				$1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$
1	3	3	1			$1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$
1	4	6	4	1		$1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$
1	5	10	10	5	1	$1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$

והנה המשולש של פסקל, במלא הדרו.

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	הסך
$(a + b)^1 \rightarrow$	1	1									2
$(a + b)^2 \rightarrow$	1	2	1								4
$(a + b)^3 \rightarrow$	1	3	3	1							8
$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1						16
$(a + b)^5 \rightarrow$	1	5	10	10	5	1					32
$(a + b)^6 \rightarrow$	1	6	15	20	15	6	1				64
$(a + b)^7 \rightarrow$	1	7	21	35	35	21	7	1			128
$(a + b)^8 \rightarrow$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		256
$(a + b)^9 \rightarrow$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	512

$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1
-------------------------	---	---	---	---	---

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

המשולש של פסקל.

החלק שלרשותנו, היום.

האם אפשר לסחוט העמודות, להוציא מהם עוד אפשרויות?

כל אחד מוזמן לנסות.

אני אסתפק בעמודה-3.

כן! הצלחתי למצוא דרך השווה לכל המשולשים!

הבה, ונבדוק הדבר בצעד אחר צעד.

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	אנו כבר ראינו איך סך העמודה האחרונה מתחלק ב 5^3. $5 + 15 + 35 + 70 = 5^3$ לשים לב, כי סך האלכסון, גם הוא $5^3 =$
L ₄	1	4	6	4	1		
L ₅	1	5	10	10	5	1	
L ₆	1	6	15	20	15	6	
L ₇	1	7	21	35	35	21	
L ₈	1	8	28	56	70	56	
L ₉	1	9	36	84	126	126	
L ₁₀	1	10	45	120	210	252	

נעבוד עם עמודה-3 (והיא תמיד מורכבת מ 3 תאים, זה על גב זה)

$$2(10 + 20 + 35) - 5 = 5^3$$

$$5 + 15 + 35 + 70 = 5^3$$

נוסחה: פעמיים העמודה-3 פחות המספר הראשוני.

וזה נכון לכל מספר ראשוני.

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	אנו כבר ראינו כי סך העמודה האחרונה מתחלק ב 7^3. $7 + 28 + 84 + 210 + 462 + 924 = 5 * 7^3$
L ₆	1	6	15	20	15	6	1		
L ₇	1	7	21	35	35	21	7	1	
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	
L ₉	1	9	36	84	126	126	84	36	
L ₁₀	1	10	45	120	210	252	210	120	
L ₁₁	1	11	55	165	330	462	462	330	
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792	

עמודה-3 (פעמיים סך שלושת התאים, פחות המספר הראשוני)

$$2(35 + 56 + 84) - 7 = 7^3$$

פעמיים העמודה-3 פחות המספר הראשוני.

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁
L ₁₀	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
L ₁₁	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12
L ₁₃	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78
L ₁₄	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364
L ₁₅	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365
L ₁₆	1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	800	4368
עמודה-3 $2(165 + 220 + 286) - 11 = 11^3$ פעמיים העמודה-3 פחות המספר הראשוני.						6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376
						8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824
						11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582
						15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960

בכולם, צלע משולש-התאים שבעמודה האחרונה
כוללת המספר בחזקת 3, כפול איזה מספר.

אנו נבדוק כל משולש, איך העמודה-3 נותנת 5^3 כפול מספר מסוים?
אנו נבדוק כל משולש, איך העמודה- האחרונה נותנת 5^3 כפול מספר מסוים?
משולש אחד!

שני משולשים

1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1				
1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1			
1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1		
1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1257	715	286	78	13	1	
1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1

פעמיים עמודה-3 פחות הראשוני (לאחר השינוי)

$$2 (120 + 165 + 220) - 10 = 8 * 5^3$$

$$3 (45 + 165 + 495) + 10 = 17 * 5^3$$

העמודה האחרונה. $10 + 55 + 220 + 715 = 8 * 5^3$

העמודה האחרונה. $210 + 330 + 495 + 715 = 14 * 5^3$

הערה, עמודה-3, זה עובד רק במשולש הראשון!

שלוש משולשים

1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1				
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1			
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1		
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1	
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1

פעמיים עמודה-3 פחות הראשוני (לאחר השינוי)

$$2 (455 + 560 + 680) - 15 = 27 * 5^3$$

במשולש השני זה בכלל לא מתפקד.

במשולש השלישי, ניתן להתאים אפשרות.

$$3 (105 + 560 + 2380) - 10 = 73 * 5^3$$

$$15 + 120 + 680 + 3060 = 31 * 5^3$$

$$5005 + 11440 + 24310 + 48620 = 715 * 5^3$$

$$1365 + 1820 + 2380 + 3060 = 69 * 5^3$$

ארבע משולשים

1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970	77520	38760	15504	4845	1140	190	20	1				
1	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930	352716	352716	293930	203490	116280	54264	20349	5985	1330	210	21	1			
1	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770	497420	646646	705432	646646	497420	319770	170544	74613	26334	7315	1540	231	22	1		
1	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314	817190	1144066	1352078	1352078	1144066	817190	490314	245157	100947	33649	8855	1771	253	23	1	
1	24	276	2024	10626	42504	134596	346104	735471	1307504	1961256	2496144	2704156	2496144	1961256	1307504	735471	346104	134596	42504	10626	2024	276	24	1

פעמיים עמודה-3 פחות הראשוני (לאחר השינוי)

$$2 (1140 + 1330 + 1540) - 20 = 64 * 5^3$$

$$3 (190 + 1330 + 7315) - 5 = 212 * 5^3$$

$$20 + 210 + 1540 + 8855 = 85 * 5^3$$

$$38760 + 116280 + 319770 + 817190 = 10336 * 5^3$$

$$167960 + 293930 + 497420 + 817190 = 14212 * 5^3$$

$$4845 + 5985 + 7315 + 8855 = 216 * 5^3$$

העמודה האחרונה, נאמנת בכל המשולשים... עד האין סוף!

בלעדיות למשולש "שבע"

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇
L ₆	1	6	15	20	15	6	1	
L ₇	1	7	21	35	35	21	7	1
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8
L ₉	1	9	36	84	126	126	84	36
L ₁₀	1	10	45	120	210	252	210	120
L ₁₁	1	11	55	165	330	462	462	330
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792

$$56 + 70 + 56 + 126 + 126 + 252 = 2 * 7^3$$

כאן פנימיות המשולש ללא עמודה-6, ולמטה כולל עמודה-6

הבה ונבדוק בתוך המשולשים.

1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	100 ²	364	91	14	1
1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628
1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970	77520	38760
1	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930	352716	352716	293930	203490	116280

$$105 + 455 + 1365 + 3003 + 560 + 1820 + 4368 + 2380 + 6188 + 8568 = 28812$$

$$28812 = 84 * 7^3 \dots \text{"שבע"}$$

[illegible]

$$13 + 91 + 455 + 1820 + 6188 + 18564 + 50388 + 125970 + 293930 + 646646 + 1352078 + 2704156 = 2367 * 13^3$$

איני יודע אם דברים אלו מצויים בספרים כל שהם. אכן כדאי לפרסם
האתר שלנו, ולזכות לאותם שהיו מוכנים לשלם לזכות לידיע חדשני זה!

האם תוכלו לעשות זאת בקיפוי?
אפשר ככלל החברים שלכם,
יש המתעניינים
במה שאנו עוסקים בו?

שתצליחו, בהקנת החומר ובפרסומו!

נא להביע חוות דעתכם
etgaim77@outlook.com
או להעיר הערות, או להציע הצעות.