

דפים אלו מגישות המשולש של פסקל לכל גוונים.
 וכמובן כולל גם ליקוטים מהאינטרנט.
 אך בעיקר, כולל העבודה החדשנית
 דברים שלא חדשו אותם אחרים.
 אתם מעצמכם תחושו שיש קסם מה בעולם המספרים.

ככל פצט אנו נראה
 חלק א'
 פתיחת הצניין,
 ומאנו נצבור לחלק שאנו רוצים לעסוק בו.
 כי חלק א'
 צניינו להסביר היסוד שבו נבנה לוח פסקל.

עד שנגיע לדברים עמוקים יותר, יש להתחיל מהתחלה.
 והנה המשולש של פסקל, ולמה נקרא משולש.

					1						
				1	1						
			1	2	1						
		1	3	3	1						
	1	4	6	4	1						
	1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1					

$$4 + 6 = 10$$

המשולש של פסקל.

חלק I

אכן כך הוא הבניין של משולש זה:
מתחילים ב "1" משני צידי המשולש.

					1						
				1		1					
			1				1				
		1						1			
	1								1		
1										1	

ואז, מתחילים לחבר כל שני תאים (באופק)
ולכתוב הסך למטה באמצע.

					1						
				1		1					
				↘		↙					
			1		2		1				
			↘		↙		↘		↙		
		1		3		3		1			
		↘		↙		↘		↙			
	1		4		6		4		1		
	↘		↙		↘		↙		↘		
1		5		10		10		5		1	

והנה המשולש של פסקל, ולמה נקרא משולש.

					1						
				1		1					
			1		2		1				
		1		3		3		1			
	1		4		6		4		1		
1		5		10		10		5		1	
1	6		15		20		15		6		1

הסך של שני תאים צמודים, נמצא למטה (באמצע) מתחתיהם.

וכן לימדונו בכיתה אודות משולש זה!

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
			1		4		6		4		1	
		1		5		10		10		5		1
	1		6		15		20		15		6	
	1		6		15		20		15		6	

וזה מה שלמדנו :

בשביל למצוא הסך 10 של שני התאים 6 ו 4,
יש להסתכל במספר (10) הנמצא באמצע מתחתיהם.

אבל כשהן בלוח הזה שאינם בצורת משולש..
ה 10 נמצא מתחת לשני התאים (מימין) $10 = 6 + 4$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

אנו ניעזר באותיות.

C לעמודה, **L** לשורה.

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁	C ₁₂
L ₀	1												
L ₁	1	1											
L ₂	1	2	1										
L ₃	1	3	3	1									
L ₄	1	4	6	4	1								
L ₅	1	5	10	10	5	1							
L ₆	1	6	15	20	15	6	1						
L ₇	1	7	21	35	35	21	7	1					
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
L ₉	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
L ₁₀	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
L ₁₁	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

יש להבחין בשני מהלכים שווים בערכם.

(ואילו היו המספרים נשארים בצורת משולש, היינו גם רואים הסימטריות)

אך בלוח זה אנו מוצאים הן מלמעלה למטה (בעמודות) והן באלכסון, אותו דבר
[למשל, בעמודה-1, מ 1 עד 8 .. הסך 36]!

הסימטריות

								1								
							1		1							
						1		2		1						
				1			3		3		1					
			1		4			6		4		1				
		1		5		10			10		5		1			
	1		6			15		20		15		6		1		
1		7			21		35		35		21		7		1	
1	8			28			56		56		28			8		1

אנו גם יכולים להבחין, המספרים באדום!
מוצאים הסימטריות שבלוח הקודם.

פרשנות שנית שראינו בכיתה.
וזה הוגש לנו לאחר שהתחלנו ללמוד אלגברה.

$$(a + b)^1 = 1a^1 + 1b^1$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$$

וכעת ניתן לנו להבחין! אמת יש בזה מה שיש בזה!

1	1					$1a^1 + 1b^1$
1	2	1				$1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$
1	3	3	1			$1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$
1	4	6	4	1		$1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$
1	5	10	10	5	1	$1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$

לאמתו של דבר, אין מן הנכון לכתוב "1" בצמוד לאותיות (כי מובן מאליו), אלא נכתב כאן רק לעורר תשומת הלב!

והנה המשולש של פסקל, במלא הדרו.

	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	הסך
$(a + b)^1 \rightarrow$	1	1									2
$(a + b)^2 \rightarrow$	1	2	1								4
$(a + b)^3 \rightarrow$	1	3	3	1							8
$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1						16
$(a + b)^5 \rightarrow$	1	5	10	10	5	1					32
$(a + b)^6 \rightarrow$	1	6	15	20	15	6	1				64
$(a + b)^7 \rightarrow$	1	7	21	35	35	21	7	1			128
$(a + b)^8 \rightarrow$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		256
$(a + b)^9 \rightarrow$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	512

ניקח לדוגמה, השורה מס' 4.

$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1
-------------------------	---	---	---	---	---

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

פשוט! זה מה שראינו במשולש. רק הפעם, זה דרך הלוח!

נעבור לבדוק במשולש של 7.

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁
L ₆	1	6	15	20	15	6	1		$28^2 - 21^2 = 1 * 7^3$ $84^2 - 35^2 = 17 * 7^3$ $210^2 - 35^2 = 125 * 7^3$ $126^2 - 70^2 = 32 * 7^3$ $462^2 - 21^2 = 621 * 7^3$ $252^2 - 56^2 = 176 * 7^3$ $924^2 - 7^2 = 2489 * 7^3$ $462^2 - 28^2 = 620 * 7^3$ $210^2 - 84^2 = 108 * 7^3$			
L ₇	1	7 ³	21 ²	35 ²	35 ²	21 ²	7 ²	1				
L ₈	1	8	28 ²	56	70 ²	56 ²	28 ²	8				
L ₉	1	9	36	84 ²	126 ²	126	84 ²	36				
L ₁₀	1	10	45	120	210 ²	252 ²	210 ²	120				
L ₁₁	1	11	55	165	330	462 ²	462 ²	330				
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924 ²	792				
L ₁₃	1	13	78	286	715	1287	1716	1716				

גם כאן מגלים 7³ בעינו, עם מכפיל.

אנו רואים שמספר הפעולות בפנים המשולש, הולך וגדל.

אם נבדוק הבדלי ריבועים בכל המשולש של 11³

אנו תמיד נקבל מספר שלם כפול 11³.

L ₁₀	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
L ₁₁	1	11 ³	55 ²	165 ²	330 ²	462 ²	462 ²	330 ²	165 ²	55 ²	11 ²	1
L ₁₂	1	12	66 ²	220	495 ²	792 ²	924 ²	792 ²	495 ²	220 ²	66 ²	12
L ₁₃	1	13	78	286 ²	715 ²	1287	1716 ²	1716 ²	1287 ²	715 ²	286 ²	78
L ₁₄	1	14	91	364	1001 ²	2002 ²	3003 ²	3432	3003 ²	2002 ²	1001 ²	364
L ₁₅	1	15	105	455	1365	3003 ²	5005 ²	6435 ²	6435 ²	5005	3003 ²	1365
L ₁₆	1	16	120	560	1820	4368	8008 ²	11440 ²	12870 ²	11440 ²	8008 ²	4368
L ₁₇	1	17	136	680	2380	6188	12376	19448 ²	24310 ²	24310 ²	19448 ²	12376
L ₁₈	1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758 ²	48620 ²	43758 ²	31824
L ₁₉	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378 ²	92378 ²	75582
L ₂₀	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756 ²	167960
$66^2 - 55^2 = 11^3$												352716

כל x שבלוח הבא, עניינו מספר שלם.

כל אלו נבדקו

$11^3 = 1331$	$43758^2 - 165^2 = 1331 * x$
$66^2 - 55^2 = 1331 * x$	$24310^2 - 495^2 = 1331 * x$
$286^2 - 165^2 = 1331 * x$	$12870^2 - 1287^2 = 1331 * x$
$1001^2 - 330^2 = 1331 * x$	$6435^2 - 3003^2 = 1331 * x$
$715^2 - 495^2 = 1331 * x$	$92378^2 - 55^2 = 1331 * x$
$3003^2 - 462^2 = 1331 * x$	$48620^2 - 220^2 = 1331 * x$
$2002^2 - 792^2 = 1331 * x$	$24310^2 - 715^2 = 1331 * x$
$8008^2 - 462^2 = 1331 * x$	$11440^2 - 2002^2 = 1331 * x$
$5005^2 - 924^2 = 1331 * x$	$184756^2 - 11^2 = 1331 * x$
$3003^2 - 1716^2 = 1331 * x$	$92378^2 - 66^2 = 1331 * x$
$19448^2 - 1001^2 = 1331 * x$	$43758^2 - 286^2 = 1331 * x$
$11440^2 - 2002^2 = 1331 * x$	$19448^2 - 1001^2 = 1331 * x$
$6435^2 - 1716^2 = 1331 * x$	$8008^2 - 3003^2 = 1331 * x$

וכן אם נבדוק 13^3 . . .

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁	C ₁₂
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1
L ₁₃	1	13 ³	78 ²	286 ²	715 ²	1287 ²	1716 ²	1716 ²	1287 ²	715 ²	286 ²	78 ²	13 ²
L ₁₄	1	14	91 ²	364	1001 ²	2002 ²	3003 ²	3432 ²	3003 ²	2002 ²	1001 ²	364 ²	91 ²
L ₁₅	1	15	105	455 ²	1365 ²	3003	5005 ²	6435 ²	6435 ²	5005 ²	3003 ²	1365 ²	455 ²
L ₁₆	1	16	120	560	1820 ²	4368 ²	8008 ²	11440	12870 ²	11440 ²	8008 ²	4368 ²	1820 ²
L ₁₇	1	17	136	680	2380	6188 ²	12376 ²	19448 ²	24310 ²	24310	19448 ²	12376 ²	6188 ²
L ₁₈	1	18	153	816	3060	8568	18564 ²	31824 ²	43758 ²	48620 ²	43758 ²	31824	18564 ²
L ₁₉	1	19	171	969	3876	11628	27132	50388 ²	75582 ²	92378 ²	92378 ²	75582 ²	50388 ²
L ₂₀	1	20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970 ²	167960 ²	184756	167960 ²	125970 ²
L ₂₁	1	21	210	1330	5985	20349	54264	116280	203490	293930 ²	352716 ²	352716 ²	293930 ²
L ₂₂	1	22	231	1540	7315	26334	74613	170544	319770	497420	646646 ²	705432 ²	646646 ²
L ₂₃	1	23	253	1771	8855	33649	100947	245157	490314	817190	1144066	1352078 ²	1352078 ²
L ₂₄	1	24	276	2024	10626	55154	134596	346104	735471	1307504	1961256	2496144	2704156 ²

כל x שבלוח הבא, עניינו מספר שלם.
כל אלו נבדקו

$13^3 = 2197$ $91^2 - 78^2 = 2197 * x$ $455^2 - 286^2 = 2197 * x$ $1820^2 - 715^2 = 2197 * x$ $1365^2 - 1001^2 = 2197 * x$ $6188^2 - 1287^2 = 2197 * x$ $4368^2 - 2002^2 = 2197 * x$ $18564^2 - 1716^2 = 2197 * x$ $12376^2 - 3003^2 = 2197 * x$ $8008^2 - 5005^2 = 2197 * x$ $50388^2 - 1716^2 = 2197 * x$ $31824^2 - 3432^2 = 2197 * x$ $19448^2 - 6435^2 = 2197 * x$ $125970^2 - 1287^2 = 2197 * x$ $75582^2 - 3003^2 = 2197 * x$ $43758^2 - 6435^2 = 2197 * x$ $24310^2 - 12870^2 = 2197 * x$ $293930^2 - 715^2 = 2197 * x$ $167960^2 - 2002^2 = 2197 * x$ $92378^2 - 5005^2 = 2197 * x$ $48620^2 - 11440^2 = 2197 * x$	$13^3 = 2197$ $646646^2 - 286^2 = 2197 * x$ $352716^2 - 1001^2 = 2197 * x$ $184756^2 - 3003^2 = 2197 * x$ $92378^2 - 8008^2 = 2197 * x$ $43758^2 - 19448^2 = 2197 * x$ $1352078^2 - 78^2 = 2197 * x$ $705432^2 - 364^2 = 2197 * x$ $352716^2 - 1365^2 = 2197 * x$ $167960^2 - 4368^2 = 2197 * x$ $75582^2 - 12376^2 = 2197 * x$ $2704156^2 - 13^2 = 2197 * x$ $1352078^2 - 91^2 = 2197 * x$ $646646^2 - 455^2 = 2197 * x$ $293930^2 - 1820^2 = 2197 * x$ $125970^2 - 6188^2 = 2197 * x$ $50388^2 - 18564^2 = 2197 * x$ כל אלו נבדקו...
---	--

ואם אנו נתפשט עד האין סוף, מה נגלה?
 אותו דבר! זה מתפקד לא פחות מהמשולש הראשון.

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁	C ₁₂
L ₃	1	3	3	1				$55^2 - 45^2 = 1 * 10^3 = 8 * 5^3$ $220^2 - 120^2 = 272 * 5^3$ $715^2 - 210^2 = 3737 * 5^3$ $495^2 - 330^2 = 1089 * 5^3$ $330^2 - 120^2 = 756 * 5^3$ $495^2 - 45^2 = 1944 * 5^3$ $715^2 - 10^2 = 4059 * 5^3$ $220^2 - 55^2 = 363 * 5^3$					
L ₄	1	4	6	4	1								
L ₅	1	5 ³	10 ²	10 ²	5 ²	1							
L ₆	1	6	15 ²	20	15 ²	6	1						
L ₇	1	7	21	35 ²	35 ²	21	7						
L ₈	1	8	28	56	70 ²	56	28						
L ₉	1	9	36	84	126	126	84						
L ₁₀	1	10 ³	45 ²	120 ²	210 ²	252	210	120 ²	45 ²	10 ²	1		
L ₁₁	1	11	55 ²	165	330 ²	462	462	330 ²	165	55 ²	11	1	
L ₁₂	1	12	66	220 ²	495 ²	792	924	792	495 ²	220 ²	66	12	1
L ₁₃	1	13	78	286	715 ²	1287	1716	1716	1257	715 ²	286	78	13
L ₁₄	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91

לשים לב לשני המשולשים. אותה שורה לכל משולש, אבל לא אותן פעולות.
 גם משולשי המִשְׁנָה, כוללים בעמודות שלהם, הבדלי ריבועים למספר הראשוני בחזקת 3.
 כמובן, כי אנו תמיד נמצא
 כי הבדלי ריבועים, שווים המספר הראשוני בחזקת 3, בכפל למספר מסוים.
 וזה שייך לכל מספר ראשוני.

1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1				
1	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1			
1	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1		
1	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1	
1	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1

$120^2 - 105^2 = x * 5^2$; $680^2 - 455^2 = x * 5^2$; $3060^2 - 1365^2 = x * 5^2$; $2380^2 - 1820 = x * 5^2$
 $11440^2 - 6435^2 = x * 5^2$; $24310^2 - 6435^2 = x * 5^2$; $48620^2 - 5005^2 = x * 5^2$; $24310^2 - 11440 = x * 5^2$
 $1820^2 - 455^2 = x * 5^2$; $2380^2 - 105^2 = x * 5^2$; $3060^2 - 15^2 = x * 5^2$; $680^2 - 120 = x * 5^2$
 כל אלו נבדקו...

איני יודע אם דברים אלו מצויים בספרים כל שהם. אכן כדאי לפרסם
האתר שלנו, ולזכות לאותם שהיו מוכנים לשלם לזכות לידע חדשני זה!

האם תוכלו לעשות זאת שביי?
אפשר ככלל החברים שלכם,
יש המתעניינים
במה שאנו עוסקים בו?

שתצליחו, בהקנת החומר ופרסומו!

נא להביע חוות דעתכם
etgaim77@outlook.com
או להעיר הערות, או להציע הצעות.