

דפים אלו מגישות המשולש של פסקל לכל גווניו.
 וכמובן כולל גם ליקוטים מהאינטרנט.
 אך בעיקר, כולל העבודה החדשנית
 דברים שלא חדשו אותם אחרים.

אתם מעצמכם תחושו שיש קסם מה בעולם המספרים.

ככל פצט אנו נראה

חלק א'

פתיחת הצניין,

ומאנו נצבור לחלק שאנו רוצים לעסוק בו.

כי חלק א'

צניינו להסביר היסוד שבו נבנה לוח פסקל.

עד שנגיע לדברים עמוקים יותר, יש להתחיל מההתחלה.
 והנה המשולש של פסקל, ולמה נקרא משולש.

						1							
					1		1						
				1		2		1					
			1		3		3		1				
		1		4		6		4		1			
	1		5		10		10		5		1		
1		6		15		20		15		6		1	

$$4 + 6 = 10$$

המשולש של פסקל.

חלק I

אכן כך הוא הבניין של משולש זה:
מתחילים ב "1" משני צידי המשולש.

					1						
				1		1					
			1				1				
		1						1			
	1								1		
1										1	

ואז, מתחילים לחבר כל שני תאים (באופק)
ולכתוב הסך למטה באמצע.

					1						
				1		1					
				↘		↙					
			1		2		1				
			↘		↙		↘		↙		
		1		3		3		1			
		↘		↙		↘		↙			
	1		4		6		4		1		
	↘		↙		↘		↙		↘		
1		5		10		10		5		1	

והנה המשולש של פסקל, ולמה נקרא משולש.

					1						
				1		1					
			1		2		1				
		1		3		3		1			
	1		4		6		4		1		
1		5		10		10		5		1	
1	6		15		20		15		6		1

הסך של שני תאים צמודים, נמצא למטה (באמצע) מתחתיהם.

וכן לימדונו בכיתה אודות משולש זה!

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
			1		4		6		4		1	
		1		5		10		10		5		1
	1		6		15		20		15		6	
1		6		15		20		15		6		1

וזה מה שלמדנו :

בשביל למצוא הסך 10 של שני התאים 6 ו 4 ,
יש להסתכל במספר (10) הנמצא באמצע מתחתיהם.

אבל כשהן בלוח הזה שאינם בצורת משולש..
ה 10 נמצא מתחת לשני התאים (מימין) $10 = 6 + 4$

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

אנו ניעזר באותיות.

C לעמודה, **L** לשורה.

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁	C ₁₂
L ₀	1												
L ₁	1	1											
L ₂	1	2	1										
L ₃	1	3	3	1									
L ₄	1	4	6	4	1								
L ₅	1	5	10	10	5	1							
L ₆	1	6	15	20	15	6	1						
L ₇	1	7	21	35	35	21	7	1					
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
L ₉	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
L ₁₀	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
L ₁₁	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

יש להבחין בשני מהלכים שווים בערכם.

(ואילו היו המספרים נשארים בצורת משולש, היינו גם רואים הסימטריות)

אך בלוח זה אנו מוצאים הן מלמעלה למטה (בעמודות) והן באלכסון, אותו דבר
[למשל, בעמודה-1, מ 1 עד 8 .. הסך 36]!

[illegible]

פרשנות שנית שראינו בכיתה.
וזו הוגש לנו לאחר שהתחלנו ללמוד אלגברה.

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$$

1	1					$1a^1 + 1b^1$
1	2	1				$1a^2 + 2a^1b^1 + 1b^2$
1	3	3	1			$1a^3 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1b^3$
1	4	6	4	1		$1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$
1	5	10	10	5	1	$1a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1b^5$

והנה המשולש של פסקל, במלא הדרו.

	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	n
$(a + b)^1 \rightarrow$	1	1									2
$(a + b)^2 \rightarrow$	1	2	1								4
$(a + b)^3 \rightarrow$	1	3	3	1							8
$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1						16
$(a + b)^5 \rightarrow$	1	5	10	10	5	1					32
$(a + b)^6 \rightarrow$	1	6	15	20	15	6	1				64
$(a + b)^7 \rightarrow$	1	7	21	35	35	21	7	1			128
$(a + b)^8 \rightarrow$	1	8	28	56	70	56	28	8	1		256
$(a + b)^9 \rightarrow$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	512

$(a + b)^4 \rightarrow$	1	4	6	4	1
-------------------------	---	---	---	---	---

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1b^4$$

המשולש של פסקל.

החלק שלרשותנו, היום.

ראינו, מה זה מרווח בין מספרים?

האם שייך כזה דבר במספרים שבחזקת 2, בחזקת 3, וכדומה?

ואם לזה יש שייכות ללוח של פסקל?

כאן הקבוצה מתחילה מ **1** שעניינו 1^2 . עד שמגיעים ל **4** שעניינו 2^2 . עד שמגיעים ל **9** שעניינו 3^2

1 . 2 . 3 . **4** . 5 . 6 . 7 . 8 . **9** . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . **16** . 17 . 18 . 19 . 20 . 21 . 22 . 23 . 24 . **25** . 26 . 27 . 28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . **36** . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . **49** . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56 . 57 . 58 . 59 . 60 . 61 . 62 . 63 . **64** . 65 . 66 . 67 . 68 . 69 . 70 . 71 . 72 . 73 . 74 . 75 . 76 . 77 . 78 . 79 . 80 . **81** . 82 . 83 . 84 . 85 . 86 . 87 . 88 . 89 . 90 . 91 . 92 . 93 . 94 . 95 . 96 . 97 . 98 . 99 . **100** . 101 . 102 . 103 . 104 . 105 . 106 . 107 . 108 . 109 . 110 . 111 . 112 . 113 . 114 . 115 . 116 . 117 . 118 . 119 . 120 . **121** .

אנו מוצאים כי רק זוגות של מספרים נמצאים במרווח (בין כל שני קצוות). את זה נמצא בכל

המרווחים "של n^2 ". וזה גם מה שנראה במרווחים לקבוצה "בחזקת שלוש".

להעיר, מספר זוגות המספרים שבתוך המרווח = (פעמיים) שורש לריבוע הראשון של המרווח.

9 . 10 . 11 . 12 . 13 . 14 . 15 . 16

למשל, בין 9 ל 16 יש 6 מספרים, כלומר 3 זוגות מספרים, כלומר $\sqrt{9}$ זוגות מספרים.

עוד דיוק, היות והמספרים הפשוטים (1, 2, 3, 4, ...) הם, מספר זוגי ומספר אי-זוגי, לכל הדרך, כן תהיה לנו למספרים שבקצוות, שהם מייצגים המספרים הפשוטים "של n^2 ". הסבר 1, 4, 9, 16, ...

אחד זוגי ואחד אי-זוגי. כלומר, איך מבטאים $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ אחד זוגי, ואחד אי זוגי.

את זה, אנו נמצא בכל המרווחים "של n^2 ". וזה מה שנראה במרווחים לקבוצה "בחזקת שלוש".

כמה מספרים יש במרווח הזה?

פעמיים $\sqrt{36}$

36 . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49

אלו המספרים שבין 36 ל 49. כמה מספרים הם? כמוכן, 49 פחות 36 = 12 מספרים. אלא ש...

$36 = 6^2$; $49 = 7^2$; $7 - 6 = 1$ וזהו. יש לנו 12 מספרים במרווח שבין 36 ל 49.

שיטה הרבה יותר פשוטה, לכפול 6 השייך ל 6^2 ב 2 = 12

ואם תרצה 6 זוגות מספרים, ולכל זוג מהם, הסך $36 + 49 = 85$

והנה ששת הזוגות: $43+42$; $44+41$; $45+40$; $46+39$; $47+38$; $48+37$

ומה סך אלו המספרים?

36 . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49

$$510 = 85 * 6$$

אנו רוצים לראות כל זה על הלוח שלנו!

מה ששייך למרווח 36 ל 49 הם השורשים שלהם 6 ו 7. אנו חברנו $36 + 49 = 85$

מה זה 85? $85 = 1 - 84$... טוב מאוד! $84 = 7 * 6 * 2$

אנו תמיד נמצא כי סך שני ריבועים (עוקביים) "פחות 1" = פעמיים המספר כפול המספר העוקבי.

כמה דוגמאות:

$$10 * 9 * 2 = 180 \dots 181 = 10^2 + 9^2$$

$$4 * 3 * 2 = 24 \dots 25 = 4^2 + 3^2$$

$$19 * 18 * 2 = 684 \dots 685 = 19^2 + 18^2$$

$$14 * 13 * 2 = 364 \dots 365 = 14^2 + 13^2$$

אני רוצה לעשות החלפה בתוצאה

$7^2 + 6^2 = 85$... $84 = 7 * 6 * 2$; היות כי 6 ו 7 הם מספרים עוקבים, אכן בוודאי (בכל מקרה) אחד

משניהם זוגי. אכן אני מחליף $84 = 7 * 6 * 2$ ל $84 = 7 * 6/2 * 4 = 7 * 3 * 4$

כעת אני יכול ללכת לבטח ולהסתכל בלוח שלי!

$$4 * 21 = 7 * 3 * 4 = \text{איפה אני מוצא}$$

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈
L ₀	1								
L ₁	1	1							
L ₂	1	2	1						
L ₃	1	3	3	1					
L ₄	1	4	6	4	1				
L ₅	1	5	10	10	5	1			
L ₆	1	6 ²	15	20	15	6	1		
L ₇	1	7 ²	21	35	35	21	7	1	
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	1

$$85 = 7^2 + 6^2 \text{ סך היינו } 85 = 1 - (28 + 15)2 \text{ "ועוד 1" ואם אני מוסיף}$$

$$510 = 6 * 85 \text{ (זוגות) יש לכפול ואם רצוני למצוא המרווח הפנימי,}$$

$$36 . 37 . 38 . 39 . 40 . 41 . 42 . 43 . 44 . 45 . 46 . 47 . 48 . 49$$

$$510 = 85 * 6$$

עוד דרך אחרת למצוא סך שני ריבועים עוקבים.

$$85 = 49 + 36 = 7^2 + 6^2 = 1 - (28 + 15)2 \text{ כי (למטה) שיש כאן למדנו ממה}$$

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈
L ₀	1								
L ₁	1	1							
L ₂	1	2	1						
L ₃	1	3	3	1					
L ₄	1	4	6	4	1				
L ₅	1	5	10	10	5	1			
L ₆	1	6 ²	15	20	15	6	1		
L ₇	1	7 ²	21	35	35	21	7	1	
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	1

איך למצוא סך 49 + 36 לפי הלוח.

$$7^2 = 49 = 28 + 21 \text{ היות כי}; 6^2 = 36 = 21 + 15$$

$$85 = 49 + 36 = 7^2 + 6^2 \text{ אבל } 43 = 28 + 15 \text{ סך } 21, \text{ בלי}$$

$$85 = 1 - (43 * 2) = 1 - (28 + 15)2$$

$$85 = 1 - (43 * 2) = 1 - (28 + 15)2$$

אכן! פעמיים 43, פחות 1.

עוד תרגיל

איך למצוא סך 16 + 9 לפי הלוח.

$$16 = 10 + 6 \text{ היות כי}; 9 = 6 + 3$$

$$25 = 16 + 9 \text{ אבל } 13 = 10 + 3 \text{ סך } 6, \text{ בלי}$$

$$25 = 1 - (13 * 2) = 1 - (10 + 3)2$$

$$25 = 1 - (13 * 2) = 1 - (10 + 3)2$$

אכן! פעמיים 13, פחות 1.

בדרך משלנו:

הקטן כפול שלפניו, ולחלק ב 2.

הגדול כפול שלאחריו, לחלק ב 2.

$$6^2 \text{ עד } 7^2$$

$$28 = 8/2 * 7; 15 = 5 * 6/2$$

$$85 = 1 - (43 * 2) = 1 - (28 + 15)2$$

$$85 = 1 - (43 * 2) = 1 - (28 + 15)2$$

עוד תרגיל :

. 100 . 101 . 102 . 103 . 104 . 105 . 106 . 107 . 108 . 109 . 110 . 111 . 112 . 113 . 114 . 115 . 116 . 117 . 118 . 119 .
120 . 121 .

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁	C ₁₂
L ₀	1												
L ₁	1	1											
L ₂	1	2	1										
L ₃	1	3	3	1									
L ₄	1	4	6	4	1								
L ₅	1	5	10	10	5	1							
L ₆	1	6	15	20	15	6	1						
L ₇	1	7	21	35	35	21	7	1					
L ₈	1	8	28	56	70	56	28	8	1				
L ₉	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			
L ₁₀	1	10 ²	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
L ₁₁	1	11 ²	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
L ₁₂	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1

$$221 = 11^2 + 10^2 \text{ היינו } 221 = \text{"ועוד 1"} \text{ ואם אני מוסיף "ועוד 1"} = 4 * 55$$

$$221 = 1 - (66 + 45)^2 \text{ ולפי השיטה ההיא,}$$

$$2210 = \text{ואם רצוני למצוא המרווח הפנימי, יש לכפול } 10 * 221 \text{ (זוגות)}$$

עוד תרגיל :

. 25 . 26 . 27 . 28 . 29 . 30 . 31 . 32 . 33 . 34 . 35 . 36 .

#	C ₀	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁	C ₁₂
L ₀	1												
L ₁	1	1											
L ₂	1	2	1										
L ₃	1	3	3	1									
L ₄	1	4	6	4	1								
L ₅	1	5 ²	10	10	5	1							
L ₆	1	6 ²	15	20	15	6	1						

$$61 = 6^2 + 5^2 \text{ היינו } 61 = \text{"ועוד 1"} \text{ ואם אני מוסיף "ועוד 1"} = 4 * 15$$

$$305 = 5 * 61 \text{ יש לכפול } 5 * 61 \text{ (זוגות)}$$

במילים אחרות, הלוח הזה יכול לעשות עבורנו הפעולה הזו

$$26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 = 305$$

משחק!

תבחר לך שני מספרים עוקבים. והעלה אותם בריבוע. ומאותו ריבוע האי-זוגי שבניהם תחסר 1.
תחבר שני המספרים הזוגיים, ותחלק באחד מהפשוטים, אז תקבל פעמיים הפשוט האחר.

למשל: 7 ו 8 שהם 49 ו 64. (לאחר פחות 1 מהאי-זוגי) לחבר $112 = 64 + 48 \dots$

$$112 \div 7 = 16 \text{ שהם פעמיים ה } 8$$

$$112 \div 8 = 14 \text{ שהם פעמיים ה } 7$$

$$112 = 8 \times 7 \times 2$$

$$112 = 49 + 64 \text{ (פחות 1)} = 8 \times 7 \times 2$$

$$15 = 49 - 64 = 8 + 7$$

השמת לב כי...

וכעת נסתכל על השורה-7 !

49 . 50 . 51 . 52 . 53 . 54 . 55 . 56 . 57 . 58 . 59 . 60 . 61 . 62 . 63 . **64** .

$$49 + 64 = 50 + 63 = 51 + 62 = 52 + 61 = 53 + 60 = 54 + 59 = 55 + 58 = 56 + 57 = 113$$

כל אלו שמונת הזוגות שהם 113

ניתנים להשיג דרך הלוח.

(כלומר, להגיע ל 113)

L ₆	1	6	15	20	15	6	1						
L ₇	1	7 ²	21	35	35	21	7	1					
L ₈	1	8 ²	28	56	70	56	28	8	1				
L ₉	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1			

$$113 = 1 \text{ ועוד } 112 = 4 * 28$$

וכן, באמצעות הלוח, יש עוד דרך.

$$113 = 1 - 114 = 1 - (57 * 2) = 1 - (36 + 21)2$$

ואנו יודעים כי במרווח הפנימי בין 7² ל 8² יש 7 (זוגות) פעמים 113

$$791 = 113 * 7 \text{ סך כל המספרים שבאותו מרווח.}$$
